**Exercice 1.**

**a)** On pose $P(n) : a_n > 1$.

- $P(0) : a_0 = \frac{6}{5}$ est bien strictement supérieur à 1. La proposition $P(0)$ est donc vraie.
- $P(n) \implies P(n+1) : a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \overset{P(n)}{>} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. La proposition $P(n+1)$ est vraie si $P(n)$ l'est.

Ceci montre que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** On pose $P(n) : a_n \leq 3$.

- $P(0)$ : Comme $a_0 = \frac{6}{5} = 1.2$, on a bien $a_0 \leq 3$.
- $P(n) \implies P(n+1)$ : on a (astuce !) $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} - 3 = \frac{1}{4}(a_n^2 - 9)$. Le tableau des signes de la fonction $f$ donnée par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 9)$ est

| | | $-3$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Par $P(n)$ *et* **a)**, on a $a_n \in ]1; 3]$, et on déduit $\frac{1}{4}(a_n^2 - 9) \leq 0$. Ceci veut dire $a_{n+1} - 3 \leq 0$, c'est-à-dire $a_{n+1} \leq 3$ comme voulu.

Ceci montre que $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Attention : dans "$P(n) \implies P(n+1)$", le raisonnement direct "$\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \overset{P(n)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = 3$" est incomplet puisque si $a_n = -4$ par exemple, on a bien $a_n \leq 3$ mais pas $\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \leq 3$.*

**c)** Pour voir que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on évalue le signe de $a_{n+1} - a_n$ :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} - a_n = \frac{1}{4}(a_n^2 - 4a_n + 3) = \frac{1}{4}(a_n - 1)(a_n - 3)$$

Comme $a_n - 1 > 0$ par **a)** et $a_n - 3 \leq 0$ par **b)**, on a $a_{n+1} - a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite est décroissante.

**d)** Par **c)**, la suite est décroissante, et par **a)**, elle est minorée (par 1 — mais cela ne garantit pas encore que 1 est sa borne inférieure) ; donc la suite converge. Pour trouver la limite, il faut chercher les candidats : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, alors $a = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(a-1)(a-3) = 0$ ; donc les candidats à la limite sont $a = 1$ et $a = 3$. Comme la suite commence en $a_0 < 3$ et décroit, elle converge nécessairement vers 1.

**Exercice 2.**

**a)** Séparons la démonstration en 2 parties. Première partie : posons $P(n) : u_n \geq 0$.

- $P(0)$ : Comme $u_0 = 1$, on a bien $u_0 \geq 0$.
- $P(n) \implies P(n+1)$ : comme $u_n \geq 0$ par hypothèse, le terme suivant $u_{n+1}$ est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $u_{n+1} \geq 0$ comme voulu.

Donc $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Deuxième partie (qui utilise la première !) : posons $P'(n) : u_n \leq 2$.

- $P'(0)$ : Comme $u_0 = 1$, on a bien $u_0 \leq 2$.
- $P'(n) \implies P'(n+1)$ : On calcule

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

Le tableau des signes de la fonction $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ est :

| | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Comme $u_n \in [0; 2]$ par $P(n)$ (toujours vraie) *et* $P'(n)$ (hypothèse de récurrence), on a $u_{n+1} - 2 = f(u_n) \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$, comme voulu.

On a démontré que $P'(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ par **a)**, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ : la suite est croissante.

**c)** La suite est croissante (par **b)**) et majorée (par **a)**) ; elle est donc convergente. Pour trouver les candidats à la limite, il faut résoudre $u = \frac{3u+2}{u+2}$, c'est-à-dire $-(u-2)(u+1) = 0$ (avec $u \neq -2$) ; les candidats sont donc $u = 2$ et $u = -1$. Comme la suite commence en $u_0 = 1$ et est croissante, on conclut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**Exercice 3.** Notons $(x_n)$ la suite décroissante des aires des carrés où $x_1 = 1$, et $(y_n)$ la suite décroissante des aires des disques où $y_1 = \frac{\pi}{4}$. La diagonale du deuxième carré vaut 1 et donc son côté vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $x_2 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$. Etant donné $x_n$ et $y_n$, calculons $x_{n+1}$ et $y_{n+1}$. La diagonale du carré d'aire $x_{n+1}$ vaut le diamètre du disque d'aire $y_n$ c'est-à-dire $2\sqrt{\frac{y_n}{\pi}}$. Ainsi le côté du carré d'aire $x_{n+1}$ vaut $2\sqrt{\frac{y_n}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}$ et donc $x_{n+1} = \frac{2y_n}{\pi}$. Le rayon du disque d'aire $y_{n+1}$ vaut la moitié du côté du carré d'aire $x_{n+1}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}$. Ainsi $y_{n+1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{y_n}{2\pi} = \frac{y_n}{2}$. On obtient donc la définition suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2y_n}{\pi} \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{2}, \end{cases} \qquad \text{pour } n \geq 2 \text{ et avec } y_1 = \frac{\pi}{4}$$

On peut vérifier que $x_2$ et $y_2$ que calculés plus haut satisfont bien cette définition. Il est de plus possible de simplifier la définition de $y_n$ : en effet, on a $y_n = 1/2 \cdot y_{n-1} = \cdots = (1/2)^{n-1} \cdot y_1$ et donc $x_{n+1} = (2/\pi) \cdot (1/2)^{n-1} \cdot y_1$. Pour une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilise la notation

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} s_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n} s_k \qquad \text{et on rappelle que} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi la somme des aires des carrés vaut

$$x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot y_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$, et la somme des aires des disques vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 4.**

**a)** $b = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a.$

**b)** Notons $a = 1 = b_0$, $b_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $b_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_1 = b_1^2$, $b_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_2 = b_1^3$. Ainsi on obtient $b_n = b_1^n$. Alors la longueur de la spirale vaut

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} \cdot b_1^k = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1-b_1^{n+1}}{1-b_1} \overset{|b_1|<1}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-b_1} = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$$

**Exercice 5.** Dans chaque cas, on applique la proposition du cours sur les limites des suites rationnelles.

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$

**b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\frac{7}{5}$

**c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

**d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \frac{3}{2}$

**e)** $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = -\infty$

**f)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$

**Exercice 6.** Par le cours, on sait que si $a \in [0;1[$, alors la suite $(a^n)$ tend vers 0. En utilisant ce résultat 3 fois, et en s'inspirant de la démonstration de la proposition sur la limite des suites rationnelles, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1+0}{1-0} = 0$$

L'avant-dernière égalité est vraie parce que le cours nous dit que si toutes les limites existent, alors la limite d'un produit est le produit des limites, la limite d'un quotient est le quotient des limites, et la limite d'une somme est la somme des limites.

**Exercice 7.** La deuxième égalité est fausse : en effet, même si chacune des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n$ existe, leur produit est une forme indéterminée $0 \cdot (+\infty)$ qui ne peut être égal à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot n$, une limite déterminée (il s'agit d'un des cas de "limite infinie" qui ne permet pas d'appliquer la Proposition 6.5).

La dernière égalité est aussi fausse, puisqu'elle se traduit comme $0 \cdot (+\infty)$, qui, comme mentionné ci-dessus, n'est pas déterminée (et ne vaut *a priori*, et même *a posteriori*, pas 0).