

Nom: \_\_\_\_\_ Prénom: \_\_\_\_\_

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

**Exercice 1.** (9 points)

On considère l'application  $f : \mathbb{R}_1[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$  par  $f(at + b) = (3a - b)t^2 + 2b - 6a$ .

- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ ;
- Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ ;
- Énoncer le théorème du rang et le vérifier sur l'exemple de cet exercice.

**Exercice 2.** (12 points)

Dans  $M_2(\mathbb{R})$ , on considère les sous-ensembles  $U$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,

$V$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} t+s & r+s \\ 0 & t+s \end{pmatrix}$  et  $W$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} w & 0 \\ x & w \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $U$  est sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$
- Déterminer une base de  $V$ .
- Déterminer les sous-espaces  $U \cap V \cap W$  et  $U + V + W$ , en donnant une base de chacun d'eux. Est-ce que  $U + V + W$  est une somme directe de  $M_2(\mathbb{R})$ ?
- Si  $U$  et  $V$  sont deux sous-espaces dans espace vectoriel  $E$ , énoncer la relation entre les dimensions de  $U$ ,  $V$ ,  $U \cap V$  et  $U + V$ .
- Si  $U, V$  et  $W$  sont trois sous-espaces dans espace vectoriel  $E$ , conjecturer une relation entre les dimensions de  $U + V + W$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $U \cap V$ ,  $U \cap W$ ,  $V \cap W$  et  $U \cap V \cap W$ . Vérifier cette conjecture sur les espaces étudiés dans cet exercice.

**Exercice 3.** (15 points)

On définit les deux applications linéaires

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y) \longmapsto (2x - y; x + 2y) \quad (x; y) \longmapsto (x + y; 3y; x)$$

Soit encore les bases  $\mathcal{B} = ((1; 1); (1; -2))$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{C} = ((0; 1; 0); (0; 0; 1); (\frac{1}{2}; 0; 0))$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- Déterminer la matrice  $F$  représentant  $f$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .
- Déterminer la matrice  $G$  représentant  $g$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer  $H$  la matrice de  $g \circ f$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice de changement de base  $Q$  de  $\mathcal{B}$  vers la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire la matrice  $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$ .
- Calculer la matrice de changement de base  $P$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire la matrice  $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$ .
- Calculer la matrice  $G^*$  de  $g$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  à l'aide de la formule du changement de base qui fait intervenir un produit de trois matrices.

**Exercice 4.** (8 points)

Discuter et résoudre en fonction de  $k$  le système  $H_k \cdot X = b_k$  où

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 5.** (9 points)

On donne une application linéaire  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par sa matrice  $A$  relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres éventuelles de  $\alpha$  et les espaces propres associés.
- Dire pourquoi  $\alpha$  est diagonalisable, déterminer une matrice de changement de base  $P$  et la matrice diagonale  $D$  correspondant à cette nouvelle base.
- Caractériser géométriquement  $\alpha$ .

**Exercice 6.** (6 points)

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $\alpha : V \rightarrow V$  un isomorphisme.

- Montrer que l'application réciproque  $\alpha^{-1} : V \rightarrow V$  est  $K$ -linéaire.
- Pourquoi  $\alpha^{-1}$  est-il aussi un isomorphisme ?

**Exercice 7.** (5 points)

On considère une application linéaire  $p : V \rightarrow V$  qui vérifie  $p \circ p = p$ .

Montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.