Série 25

Pour le 22 avril 2026

Exercice 1

Etudie la convergence des intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{1}{x-1}dx$;

b) $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$;

c) $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^7}dx$;

d) $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{e^x-1}dx$.

Indication. Utilise le critère de convergence (pour $\alpha = 1$).

Exercice 2

Calcule les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \ln x dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$ (changement de variables) ;

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{3x-1}{x(4x^2+1)}dx$ (décomposition en éléments simples) ;

d) $\displaystyle\int_{0}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ (deux changements de variables).

Exercice 3

Intégrales généralisées et techniques d'intégration. Calcule les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

Indication. Effectue le changement de variables correspondant à $t^2 = e^x - 1$.

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$;

Indication. Effectue le changement de variables correspondant à $x = t^2$ et continue par parties.

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2^-} \frac{dx}{4 + \tan^2 x}$;

Indication. Effectue le changement de variables correspondant à $t = \tan x$.

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[0, 1[$ et que $f(x) \geq g(x)$, alors si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1^-} f(x)dx$ converge, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)dx$ converge aussi.

b) Si f est une fonction réelle définie sur $[0, 1[$ et que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1^-} f(x)dx$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^1 f(1 - x)dx$ converge aussi.

c) Toute fonction continue f pour laquelle l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ converge est bornée sur $[0, \infty[$.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_5^\infty f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ convergent. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ converge aussi.

Exercice 5

Sans nécessairement donner les formules explicites de la fonction, explique comment construire une fonction continue sur $[0, \infty[$ et non bornée pour laquelle l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge. Inspire-toi de l'exemple vu au cours de la fonction qui n'admet pas de limite vers l'infini en affinant la méthode afin de considérer des triangles de hauteur de plus en plus grande !

Exercice 6

On veut calculer l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx$. On pose $a_k = 1 - \dfrac{3}{(6k+1)\pi}$ et $b_k = 1 - \dfrac{3}{(6k+2)\pi}$.

a) Montre que pour tout $t \in [a_k, b_k]$, on a $\left|\sin\left(\dfrac{1}{1-t}\right)\right| \geq \dfrac{1}{2}$.

b) Montre que $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6k+2}$

c) Montre que $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{6k+2}$ pour tout entier n.

d) Conclus que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x}\left|\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right| dx$ diverge.

Exercice 7

Convergence absolue. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Montre que $|\ln x| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0; 1]$.

b) Montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercices théoriques

Exercice 8

La relation d'ordre. Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ pour tout x.

a) Montre que si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge aussi.

b) Montre que si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Exercice 9

L'intégrale généralisée sur un intervalle ouvert. Soit une fonction continue $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx$ converge s'il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ convergent.

a) Montre que si cette intégrale généralisée converge pour le choix d'un nombre c, alors elle converge aussi pour tout autre choix $d \in]a, b[$.

b) Se peut-il que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ converge, mais que $\displaystyle\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ diverge ? Donne un exemple simple si c'est le cas.

Exercice 10

L'intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, suite. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^r(1-x)^s}$ pour deux nombres réels r et s.

a) Montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^{1/2} f(x)dx$ converge si et seulement si $r < 1$.

b) Montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1/2}^{1^-} f(x)dx$ converge si et seulement si $s < 1$.

c) Conclus que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^{1^-} f(x)dx$ converge si et seulement si $s < 1$ et $r < 1$.