

## Série 22

Pour le 18 mars 2026

**Exercice 1**

Calcule les intégrales définies suivantes (en utilisant le Théorème fondamental du calcul intégral) :

$$\int_0^4 x \, dx; \quad \int_1^3 (u^2 + 1)du; \quad \int_2^7 \frac{1}{v} dv; \quad \int_{-3}^2 e^{-2t} dt; \quad \int_{-2}^2 x^3 \, dx.$$

**Exercice 2**

**Théorème de la moyenne.** Regarde dans le cours ce que dit le Théorème de la moyenne. Nous nous intéressons dans cet exercice à la fonction  $f(x) = \sin x$  définie sur l'intervalle  $[0; \pi]$ . Quelle est sa valeur moyenne? En d'autres termes, on veut savoir quelle(s) sont les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $f(c) \cdot \pi$  est égal à l'aire de la surface comprise entre le graphe de la fonction sin et l'axe  $Ox$ .

**Exercice 3**

**Primitives.** Calcule *toutes* les primitives des fonctions suivantes :

- |   |                                  |   |
|---|----------------------------------|---|
| a) $f(x) = 3$   | f) $f(u) = \frac{2}{u^3}$        | l) $f(t) = \frac{\ln^3( t )}{t}$        |
| b) $f(u) = 5u$  | g) $f(t) = \sqrt{t}$             | m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$       |
| c) $f(t) = -3t^4$                                       | h) $f(t) = (t + 3)^3$            | n) $f(u) = \sin^2(u) \cdot \cos(u)$     |
| d) $f(t) = 3t^5 + 2t^4 - 1$                             | i) $f(x) = (3x^2 + x)^4(6x + 1)$ | o) $f(t) = (2t^2 + 4t)^2 \cdot (t + 1)$ |
| e) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{1}{4}$ | j) $f(u) = e^{-3u}$              |   |
|   | k) $f(t) = \frac{1}{3t + 1}$     |   |

**Exercice 4**

Montre que la fonction  $f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t} dt$  a un point d'inflexion en  $x = 0$ .

(N'essaie pas de calculer la primitive de la fonction  $e^{\sin^2 x}$  !)

**Exercice 5**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Pour toute fonction continue  $f$ , on  $\int_a^b f^2(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$ .
- b) Si  $f$  est intégrable, alors  $|f|$  aussi est intégrable.
- c) Si  $f$  n'est pas intégrable, alors  $|f|$  non plus n'est pas intégrable.
- d) Si  $f$  est une fonction continue définie sur  $[a, b]$  et que  $c \in ]a, b[$ , alors les fonctions  $h(x) = \int_a^x f(t)dt$  et  $g(x) = \int_c^x f(t)dt$  ont la même dérivée parce que *leur différence est une constante*.
- e) La fonction  $1/x$  est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $[1, 2]$ .
- f) La fonction  $1/x$  est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
- g) Soit  $f(x) = x$  définie sur  $[-1, 1]$ . Alors  $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = \left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2$ .
- h) Si une fonction continue et dérivable est périodique, alors la dérivée est périodique.
- i) Si une fonction continue est périodique, alors ses primitives aussi sont périodiques.

**Exercice 6**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sur  $[0, 1]$ .

- a) Montre que  $f$  est continue et décroissante.
- b) Calcule la somme de Darboux inférieure sur la subdivision régulière d'ordre  $n$  de l'intervalle  $[0, 1]$  et montre que  $s_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ .
- c) Trouve une primitive de  $f(x)$  et calcule  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ . (Aide-toi d'un formulaire si besoin...)
- d) Conclue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \pi/4$ . Ceci donne une manière d'approximer  $\pi$  !

**Exercice 7**

Calcule l'aire du domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ . Effectue un dessin de la situation et calcule cette aire comme différence de deux intégrales définies.

**Exercices théoriques****Exercice 8**

**Les fonctions de type  $P(x)e^{ax+b}$ .** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ ,  $a \neq 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction réelle  $f(x) = P(x)e^{ax+b}$ .

- Montre que la dérivée de  $f(x)$  est encore du même type, c'est-à-dire de la forme  $Q(x)e^{ax+b}$  avec  $Q(x)$  un polynôme de degré  $n$  (exactement!).
- Déduis de cela de quelle forme sont les primitives de  $f(x)$ .
- Calcule les primitives de  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = (5x^2 + 2x - 20)e^{5x+1}$  et  $h(x) = (x^8 + 8x^7 - 1)e^x$ .
- Calcule l'aire de la surface comprise entre l'axe  $Ox$ , les droites  $x = 0$  et  $x = 1$ , et le graphe de la fonction  $h(x) = (x^8 + 8x^7 - 1)e^x$ .

**Indication :**  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \cong 0,733741$ .

**Exercice 9**

Démontre que  $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + c$ .

**Exercice 10**

**Intégrale d'une fonction positive.** On suppose que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, positive ou nulle. On pose  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

- Montre que  $F$  est croissante et donc que  $\int_a^c f(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$  pour tout  $a \leq c \leq b$ .
- Montre que  $\int_a^b f(t) dt = 0$  si et seulement si  $f(t) = 0$  pour tout  $t$ .
- Montre que si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$ .
- Déduis de cet exercice que la fonction Arctan est croissante sur  $[0, 1]$  (cf. exercice 6).