

Série 21

Pour le 11 mars 2026

Exercice 1

Somme des carrés. Montre que

$$\frac{n^3}{3} \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}$$

pour tout $n \geq 1$.

- Vérifie que les deux inégalités sont vraies pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Montre chaque inégalité séparément par récurrence en écrivant soigneusement quelle est l'hypothèse de récurrence et où tu l'utilises.

Exercice 2

Trissection des angles. Il est impossible d'effectuer la construction du tiers d'un angle θ donné à la règle et au compas (Wantzel, 1837). Le but de cet exercice est de montrer que la construction est possible avec une règle, un compas et une spirale d'Archimède!

On se donne donc cette spirale d'équation polaire $r = \phi$. Un angle θ est donné par le demi-axe Ox positif et une demi-droite issue de l'origine (l'angle est lu dans le sens trigonométrique). Cette demi-droite coupe la spirale en un point P et on trace le cercle de centre O et de rayon $\frac{|OP|}{3}$. Ce cercle coupe la spirale en un point Q .

Montre que la demi-droite $[OQ$ détermine un angle de $\theta/3$ avec le demi-axe positif Ox . Aide-toi d'un dessin.

Indication : Sous forme polaire, la spirale s'écrit donc sous la forme $(\phi \cos(\phi), \phi \sin(\phi))$.

Exercice 3

Une fonction non intégrable. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ et σ une subdivision quelconque de $[0, 1]$.

- Calcule $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$.
- Calcule $s(f)$ et $S(f)$.
- Conclus que $s(f) \neq S(f)$ et donc que f n'est pas intégrable.

Exercice 4

L'intégrale définie d'une fonction affine. On considère la fonction $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. On cherche à calculer l'aire de la région comprise entre Ox et le graphe de cette fonction.

- Écris explicitement la subdivision régulière σ_n de $[0, a]$ d'ordre n .
- Détermine le minimum m_i et le maximum M_i de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et justifie les réponses.
- Calcule l'aire du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur m_i (puis celui de hauteur M_i).
- Calcule les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f pour σ_n .
- Calcule la limite de ces sommes de Darboux lorsque n tend vers l'infini.
- Conclus que f est intégrable et que l'aire de la région cherchée est $\frac{a^2}{4} + a$.
- Retrouve cette même valeur par un argument géométrique.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- Une fonction intégrable est continue.
- Toutes les fonctions sont intégrables.

- c) Une fonction intégrable est bornée.
- d) Si f est bornée et définie sur $[a, b]$ et que $s(f)$ et $S(f)$ existent, alors $s(f) = S(f)$.
- e) Les nombres $1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.
- f) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.
- g) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/64$.
- h) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/2$.
- i) Archimède était italien.

Exercice 6

La fonction exponentielle. Soient $a < b$ deux nombres réels. Calcule $\int_a^b e^x dx$ en suivant la méthode du cours (avec les sommes de Darboux inférieures).

- a) Calcule la somme de Darboux inférieure de e^x pour la subdivision régulière σ_n d'ordre n .
- b) Calcule la limite $s(f)$ en utilisant les σ_n .
- c) Explique pourquoi $s(f) = \int_a^b e^x dx$.

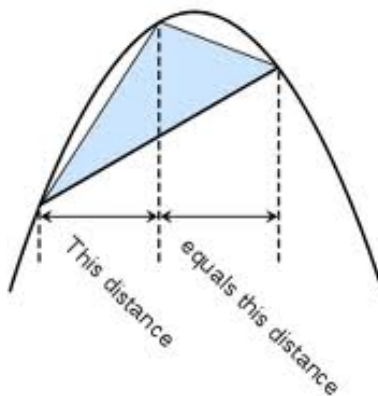
Exercice 7

Une fonction non continue et intégrable. Montre que la fonction réelle définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $[0, 2]$, mais non continue en 1.

Exercices théoriques

Exercice 8

Le secteur de parabole d'après Archimède. On considère la parabole d'équation $y = -x^2$ et le secteur compris entre la parabole et la droite passant par deux points $A = (a, -a^2)$ et $B = (b, -b^2)$. On suppose que $a < b$.



- Calcule les coordonnées du point C de la parabole dont l'abscisse vaut $\frac{a+b}{2}$ et montre que l'aire du triangle $\triangle ABC$ vaut $S = \frac{(b-a)^3}{8}$. Effectue un dessin de la situation.
- On considère maintenant les points D et E construits comme C à partir de A et C et C et B (on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux, puis maintenant en quatre...). Montre que les aires des triangles $\triangle ACD$ et $\triangle BCE$ sont égales et valent chacune $S/8$.
- Montre que l'aire du secteur de parabole est plus grande que $S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \dots + \frac{S}{4^n}$ pour tout n .
- Montre que l'aire du secteur de parabole vaut $\frac{(b-a)^3}{6}$.