Rappel : Base = système de générateurs libres et ordonnés.
$\dim V = n \Rightarrow n$ éléments lin. indép.

$\alpha : V \to W$, application linéaire.
Thm du rang : $\dim V = \dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) + \mathrm{rang}(\alpha)$
α injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$

V. Opérations élémentaires

Si $\dim V = \dim W$, alors α injective $\Leftrightarrow \alpha$ bijective $\Leftrightarrow \alpha$ surjective

Si $\dim V = m$ et $\dim W = n$, $\mathcal{L}(V; W) \sim M_{n \times m}(K)$

Nous avons terminé la semaine passée en identifiant l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires entre deux espaces de dimension finie avec un espace vectoriel de matrices. Nous allons voir aujourd'hui que cette identification est aussi compatible avec le produit. Nous verrons ensuite quelques matrices élémentaires que nous utiliseront dans les cours suivants.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Pour commencer, nous voulons réfléchir à la signification du choix d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un K-espace vectoriel V de dimension finie n. Nous nous en servons pour écrire la matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$, mais aussi pour se représenter les éléments $v \in V$ comme des vecteurs écrits en colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont les coefficients des vecteurs de base e_i dans l'expression de v comme combinaison linéaire des e_i. Explicitement, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Exemple 1.1.
Dans $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$, $3x^2 + 5x - 7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Toujours dans $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mais muni de la base $\mathcal{B}^* = (3x^2, x - 1, 2)$, $3x^2 + 5x - 7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$

car $3x^2 + 5x - 7 = 1\,(3x^2) + 5\,(x-1) - 1\,(2)$

Théorème 1.2. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n.*
Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\alpha : V \to K^n$.

Démonstration. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V et on définit $\alpha : V \to K^n$ de la façon suivante : $\alpha(e_i) = (0, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots 0)$
$\uparrow$ $i^{\text{ème}}$ position.

Par linéarité, on aura pour $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V$,

$\alpha(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

α est linéaire par construction. Elle est surjective car $\dim V = \dim K^n$.
et elle est injective car $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$.
En effet, $\sum \lambda_i e_i = 0 \iff \lambda_i = 0$ car $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base
Donc α est bijective. □

Exemple 1.3.
Soit $\mathbb{Q}[x]^{\leq 5}$ l'espace vectoriel rationnel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré ≤ 5.

C'est un EV de dimension 6, donc isomorphe à $\mathbb{Q}^6$

2 Produit et composition

Soit K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie m et W un K-espace vectoriel de dimension finie n. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de V et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de W. Considérons l'application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n \times m}(K)$ qui envoie une application linéaire $\alpha : V \to W$ sur la matrice $(\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ dont les colonnes sont les composantes des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$. Nous avons démontré que cette application est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. Montrons à présent que cet isomorphisme respecte aussi le produit.

Définition 2.1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} \in M_{n \times m}(K)$ et $B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq p} \in M_{m \times p}(K)$. Le *produit* $A \cdot B \in M_{n \times p}(K)$ est la matrice C dont le coefficient

$\left(\overbrace{\quad A \quad}^{n\ \text{col.}}\right)\left(\quad B \quad\right)\Big\}$ n lignes

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

On peut multiplier A avec B dans cet ordre si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On "combine" chaque ligne de A par chaque colonne de B.

Exemple 2.2.

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e-2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque $n = m = p$, les deux matrices sont carrées $n \times n$ et on peut les multiplier entre elles dans n'importe quel ordre. On trouve dans les deux cas une matrice carrée $n \times n$.
Mais attention, le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

Théorème 2.3. *Les matrices carrées $M_n(K)$ forment un anneau.* (mais pas un corps !)

Ajoutons à notre panoplie de K-espaces vectoriels V et W un troisième K-espace vectoriel U de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{D} = (g_1, \ldots, g_p)$.

Proposition 2.4. *Soit $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ deux applications linéaires. Alors*

$$T(\beta \circ \alpha) = T(\beta)T(\alpha).$$

Démonstration. Puisque T est déterminée par les images des vecteurs de base, il suffit de suivre les vecteurs e_i au travers de α, puis β.
L'image $\alpha(e_i)$ s'exprime comme combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j$, si bien que la i-ème colonne de la matrice $T(\alpha)$ est constituée des coefficients a_{ji}.
De même, $\beta(f_j) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{p} b_{kj} g_k$ et la k-ème colonne de $T(\beta)$ est constituée des coefficients $b_{\cancel{kj}}$. jk
La matrice $T(\beta \circ \alpha)$ est déterminée par les images des e_i et nous calculons donc

$$\beta(\alpha(e_i)) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j\right) \overset{\beta \text{ est linéaire}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \beta(f_j) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, g_k$$

$$\overset{\text{linéarité de } \Sigma}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\, a_{ji} \right) \cdot g_k$$

Le k-ème coefficient de la i-ème colonne de la matrice de $\beta \circ \alpha$ est $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}$, c'est-à-dire, par définition du produit matriciel, le k-ème coefficient de la i-ème colonne de la matrice $T(\beta)T(\alpha)$. □

Exemple 2.5. Soit $\mathbb{F}_p[x]^{\leq k}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq k$ à coefficients dans le corps à p éléments $\mathbb{F}_p$.
On considère les applications linéaires $\alpha : \mathbb{F}_p[x]^{\leq 2} \to \mathbb{F}_p[x]^{\leq 1}$ définie par la dérivation, et
$\beta : \mathbb{F}_p[x]^{\leq 1} \to \mathbb{F}_p[x]^{\leq 2}$ définie par la multiplication par x.
Quelle est la matrice de $\beta \circ \alpha$?

On choisit les bases $\overbrace{(1, x, x^2)}^{B}$ de $\mathbb{F}_p[x]^{\leq 2}$ et $\overbrace{(1, x)}^{C}$ de $\mathbb{F}_p[x]^{\leq 1}$. , $p > 2$

- $\alpha(1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C$, $\alpha(x) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C$ et $\alpha(x^2) = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- De même , $\beta(1) = x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ et $\beta(x) = x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

$\Rightarrow T(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T(\beta) \cdot T(\alpha) = T(\beta \circ \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifions par exemple $(\beta \circ \alpha)(x^2) = \beta(\alpha(x^2)) = \beta(2x) = 2x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lorsque $V = W = U$ de dimension n est muni d'une base $\mathcal{B}$, le produit de l'anneau $M_n(K)$ correspond via T à la composition des applications linéaires. En particulier, l'image de l'identité $Id : V \to V$ est la *matrice unité* I ou I_n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls. Elle a la propriété que $A \cdot I = A = I \cdot A$ puisque $\alpha \circ Id = \alpha = Id \circ \alpha$.

Proposition 2.6. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $T : \mathcal{L}(V) \to M_n(K)$ est un isomorphisme d'anneaux.*

En fait, les structures de K-espace vectoriel et d'anneau de $M_n(K)$ sont compatibles dans un sens précis. On dit que $M_n(K)$ est une *K-algèbre*.

3 Matrices particulières

Voyons maintenant quelques matrices dont la forme est si spéciale qu'elles méritent un nom particulier.
Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite *triangulaire supérieure* (respectivement *inférieure*) si

pour $i > j$, on a $a_{ij} = 0$ (resp. $j < i$, alors $a_{ij} = 0$)

Si on appelle diagonaux les coefficients a_{ii} de la matrice, cela signifie que les coefficients en-dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale sont tous nuls.

Exemple 3.1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. En effet,

$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est dite *diagonale*. Les seuls coefficients non-nuls d'une telle matrice A sont donc les a_{ii} et on note parfois $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ pour une telle matrice. Vue comme matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$ relativement à la base $\mathcal{B} = (e_1 \ldots, e_n)$, cela signifie que $\alpha(e_i) = a_{ii}e_i$. Chaque vecteur de base est envoyé sur un multiple de lui-même.
La matrice unité I de $M_n(K)$ est diagonale. C'est $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$.

Exemple 3.2. Considérons la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Si on interprète cette matrice comme celle d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ muni de n'importe quelle base, $De_i = 3e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$

C'est la matrice d'une homothétie de rapport 3 et de centre 0.

Définition 3.3. Soit $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La matrice $e_{ij} \in M_{m\times n}(K)$ est celle dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Ainsi, si $m = 2$ et $n = 3$, la matrice e_{23} est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons déjà vu que ces matrices forment une base, dite canonique, de $M_{m\times n}(K)$. C'est cette base qui nous a permis de calculer la dimension de $M_{m\times n}(K)$.
Que se passe-t-il lorsqu'on multiplie une matrice à gauche par e_{ij} ?
Puisque le produit se calcule ligne par colonne et que la seule ligne non nulle de e_{ij} est la i-ème

m colonnes

$$e_{ij} = p\text{ lignes}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i^e\text{ ligne} \\ \\ \end{matrix} \quad \underset{j^e\text{ col}}{} \quad p\times m$$

$$e_{ij} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j^e\text{ ligne} \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}_{p\times n} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i^e\text{ ligne} \end{matrix}$$

est la matrice dont la seule ligne non nulle est la $i^{\text{ème}}$ ligne, celle-ci contenant la j^e ligne de A.

e_{21} dans $M_3(K)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 3.4. Soit $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$. La *matrice élémentaire* $E_{ij}(\lambda) \in M_n(K)$ est

$$E_{ij}(\lambda) = I + \lambda e_{ij}. \quad = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ ligne} \\ \uparrow j^e \text{ colonne} \end{array}$$

Que se passe-t-il lorsqu'on multiplie une matrice à gauche par E_{ij} ?

Soit $A \in M_{m \times n}(K)$ et $E_{ij}(\lambda) = I + \lambda e_{ij} \in M_n(K)$. Alors,

$$(I + \lambda e_{ij}) \cdot A = I \cdot A + \lambda e_{ij} A = A + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ ligne}$$

$=$ la matrice A où on ajoute λ fois la ligne j à la ligne i.

Définition 3.5. Soit $1 \leq i \leq n$ et $\mu \in K^*$. La *matrice élémentaire* $D_i(\mu) \in M_n(K)$ est

$$D_i(\mu) = I + (\mu - 1)e_{ii}.$$

La matrice $D_i(\mu)$ est donc la matrice identité où a remplacé 1 par μ en i^e position. $\Rightarrow$

$D_i(\mu) \cdot A$ est la matrice A dans laquelle la i^e ligne est multipliée par $\mu \neq 0$.

Définition 3.6. Soit $1 \leq i < j \leq n$. La *matrice élémentaire* $P_{ij} \in M_n(K)$ est

$$P_{ij} = I - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}.$$

Lorsque $n = 2$, la matrice P_{12} est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En général, pour obtenir P_{ij} à partir de I on échange les lignes i et j.
Lorsqu'on multiplie une matrice à gauche par P_{ij}, on échange les i-ème et j-ème lignes.

Exemple 3.7. Calculons $P_{13} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

4 Matrices inversibles

Les matrices élémentaires que nous retrouverons à l'heure de résoudre des systèmes d'équations sont des cas particuliers de matrices que l'on peut "inverser". Nous avons vu que $M_n(K)$ est un anneau, mais en général pas un corps : certaines matrices admettent un inverse et d'autres pas.

Définition 4.1. Soit $A \in M_n(K)$. La matrice A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in M_n(K)$ telle que $AB = I = BA$. On note alors $B = A^{-1}$.
L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(K)$. GL = groupe linéaire.

Nous savons que si l'inverse de A existe, il est unique. Nous savons aussi que $GL_n(K)$ forme un groupe pour la multiplication. A priori, il n'y a pas de raison générale pour que $AB = I \Rightarrow BA = I$, mais c'est toujours le cas ! Il n'importe donc pas de trouver l'inverse à "droite" ou à "gauche".

Proposition 4.2. *Soit $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = I$. Alors $BA = I$.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire $\alpha : M_n(K) \to M_n(K)$ définie par $\alpha(X) = BX$.

α injective : $BX = 0 \Rightarrow X = IX = (AB)X = A(BX) = A \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\alpha) = 0$

α surjective car c'est une application injective entre deux EV de même dimension.

Il existe donc C telle que $B \cdot C = I$.

Or, $C = IC = (AB)C = A(BC) = A \cdot I = A$.

Et donc $B \cdot C = B \cdot A = I$

□

Exemple 4.3. Les matrices $E_{ij}(\lambda), D_i(\mu)$ et P_{ij} sont inversibles.

- L'inverse de P_{ij} est P_{ij} car en permutant à deux reprises les lignes i et j, on retombe sur la matrice originale.
- L'inverse $D_i(\mu)$ est $D_i\left(\frac{1}{\mu}\right)$, car $\mu \in K^*$ donc $\frac{1}{\mu}$ existe.
- L'inverse de $E_{ij}(\lambda)$ est $E_{ij}(-\lambda)$

Réfléchissons un instant à la signification de l'inversibilité en termes d'applications linéaires plutôt qu'en termes de matrices.
Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et A sa matrice pour un choix de bases. Il n'y a de sens de parler d'inverse que si A est une matrice carrée, si bien que l'on peut supposer que $V = W$ et que l'on choisit deux fois la même base $\mathcal{B}$ de V. Autrement dit, $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Théorème 4.4. *La matrice $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est inversible si et seulement si α est un isomorphisme.*

Démonstration.
Si α est un isomorphisme, on peut considérer l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$.
Il s'agit d'une application linéaire (voir les exercices) telle que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$.
Par conséquent, si B est la matrice de α^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$B \cdot A = (\alpha^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\alpha^{-1} \circ \alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I$$

ce qui montre que A est inversible.
Réciproquement, supposons que A est inversible et soit B son inverse. On définit $\beta : V \to V$ comme étant l'unique application linéaire dont la matrice est B dans la base $\mathcal{B}$.
Ceci signifie que $\beta(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$ et, par linéarité, si $v = \sum_i \lambda_i e_i$, on a $\beta(v) = \sum_i \sum_j \lambda_i b_{ji} e_j$.
Alors $\beta \circ \alpha$ a pour matrice $BA = I$. Autrement dit, $T(\beta \circ \alpha) = T(Id)$.
Comme T est un isomorphisme (d'espaces vectoriels et d'anneaux) on en déduit que $\beta \circ \alpha = Id$.
De même $\alpha \circ \beta = Id$. □

Exemple 4.5.
La symétrie axiale σ d'axe $x = y$ est une application linéaire du plan réel qui est bijective.

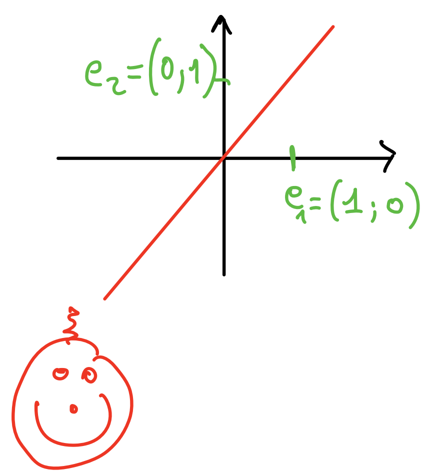
On sait que $\sigma \circ \sigma = Id$

Relativement à la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Exemple 4.6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On aimerait calculer son inverse.

$\det A = ad - bc$. Si $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$ On vérifie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Tu verras l'année prochaine que cela se généralise pour toutes les matrices carrées :

Théorème 4.7. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.