

Exercice 1. Pour s'échauffer - représentation de graphes de fonctions

Esquisser le graphe des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous dans un repère en 3 dimensions $Oxyz$.

1. $f(x, y) = 1 - x - y$
2. $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^3$
3. $f(x, y) = \sin(y), y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Correction.

1. Le graphe de f est le plan d'équation $x + y + z = 1$.

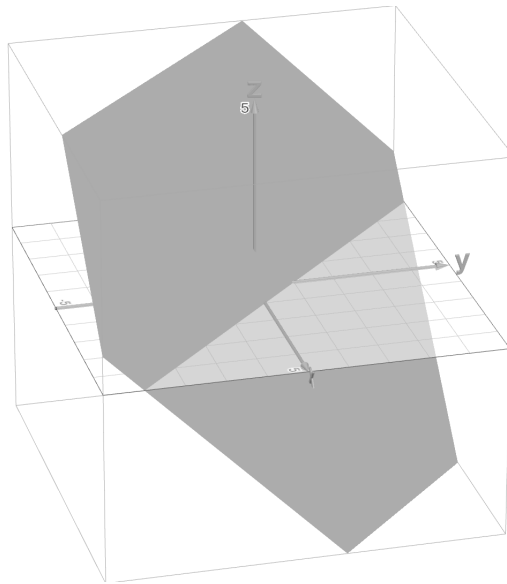


Figure 1: $f(x, y) = 1 - x - y$

2. Le graphe de f est une "parabole" de profil cubique.

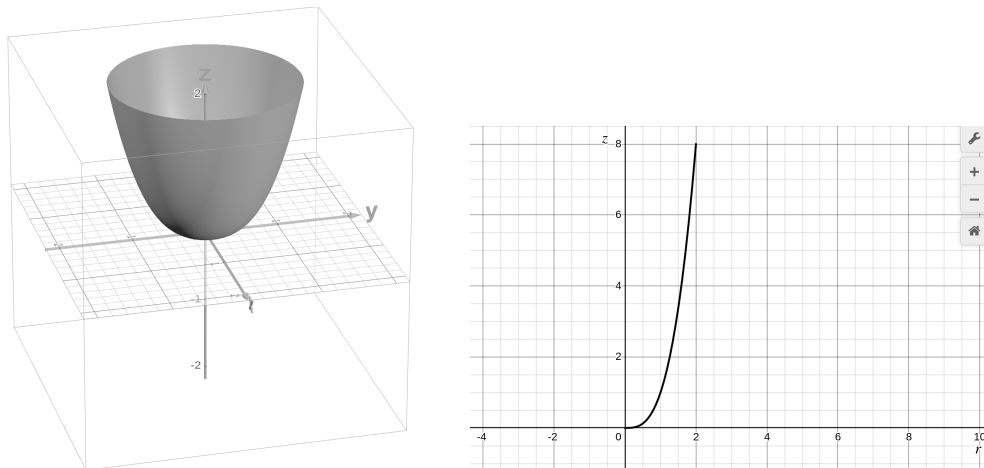


Figure 2: $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^3$. Coupe dans le plan (r, z)

3. Le graphe de f ne varie pas selon x et est une "feuille sinusoidale".

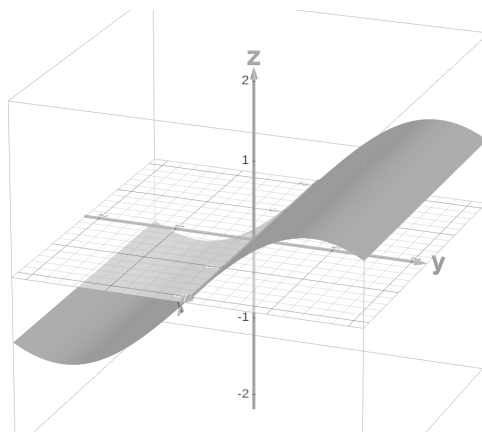


Figure 3: $f(x, y) = \sin(y)$

Exercice 2. Ensembles de niveaux

Pour chaque fonction ci-dessous :

- Déterminer le domaine de définition et l'image.
- Déterminer les ensembles de niveaux.
- Esquisser quelques-uns de ces derniers.

1. $f(x, y) = xy$

2. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

3. $f(x, y) = \sin(y)$

Correction.

1. Le domaine de définition est $D = \mathbb{R}^2$ et l'image est $\text{Im}f = \mathbb{R}$. Pour trouver les ensembles de niveaux, on résout

$$xy = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x} \text{ avec } x \neq 0.$$

Ce sont des hyperboles. Pour $c = 0$, l'ensemble des (x, y) tel que $xy = 0$ sont les deux axes de coordonnées.

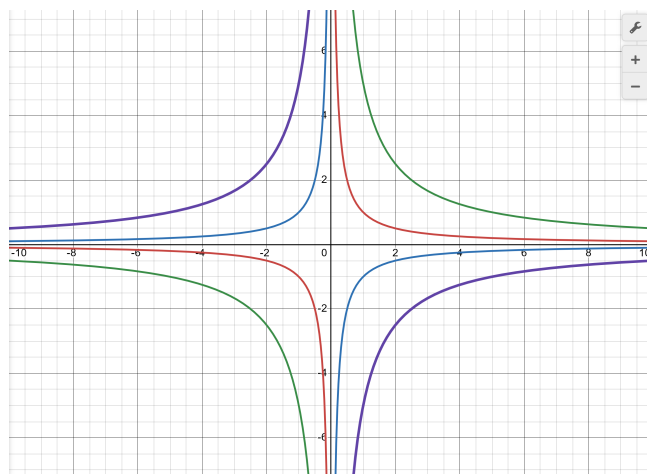


Figure 4: Ensemble de niveaux pour $f(x, y) = xy$ pour $c = -5, -1, 1, 5$.

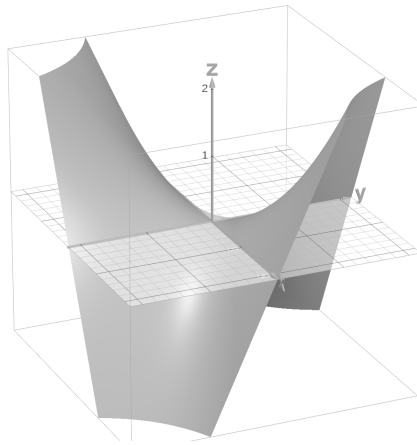


Figure 5: Graphe de $f(x, y) = xy$.

2. Le domaine de définition est

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 0\}$$

c'est-à-dire la portion du plan au-dessus de la droite d'équation $y = -x$. On a $\text{Im} f = \mathbb{R}_+$. Pour trouver les ensembles de niveau, on résout

$$(x, y) \in D \text{ et } \sqrt{x+y} = c \Leftrightarrow (x, y) \in D \text{ et } y = c^2 - x.$$

Ce sont donc des droites de pente -1 , passant par $(0, c^2)$.

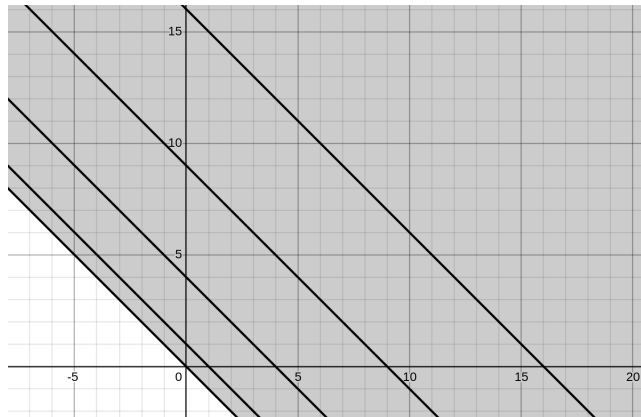


Figure 6: Ensembles de niveau pour $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ avec $c = 1, 2, 3, 4$. Le domaine de définition est la région grisée.

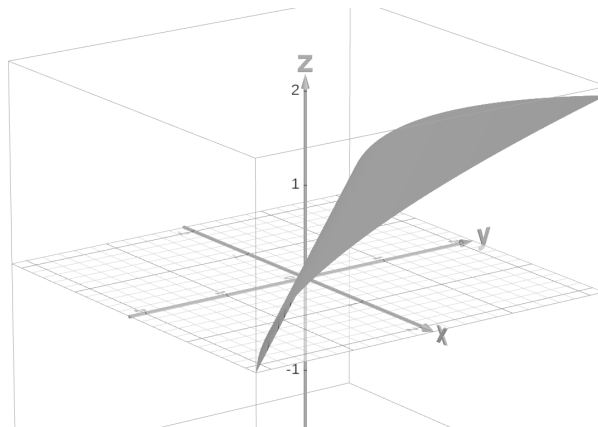


Figure 7: Le graphe de $f(x, y) = \sqrt{x+y}$

3. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$. L'image est l'intervalle $[-1, 1]$. Pour $c \in [-1, 1]$, et $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (y peut être dans tout $\mathbb{R}$ mais on choisit cette bande pour esquisser quelques une des lignes de niveaux), on a

$$\sin(y) = c \Leftrightarrow y = \arcsin(c).$$

Les ensemble de niveau sont donc les droites horizontales dans le plan Oxy (en résolvant $\sin(y) = c$ pour $y \in \mathbb{R}$, on trouve toutes les droites horizontales, pas seulement celles contenus dans la bande $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.) Par exemple, pour $c = 0, 1, -1, 1/2, -1/2$, on a les droites

$$y = 0, \quad y = \pm \frac{\pi}{6}, \quad y = \pm \frac{\pi}{2}.$$

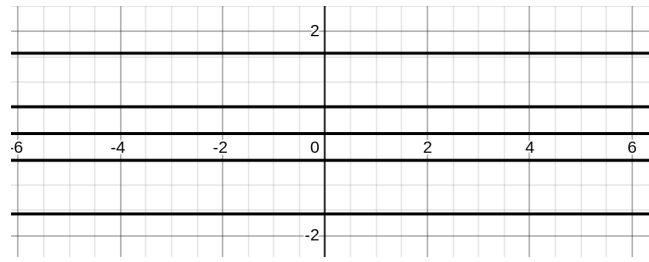


Figure 8: Ensembles de niveau pour $f(x, y) = \sin(y)$ avec $c = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

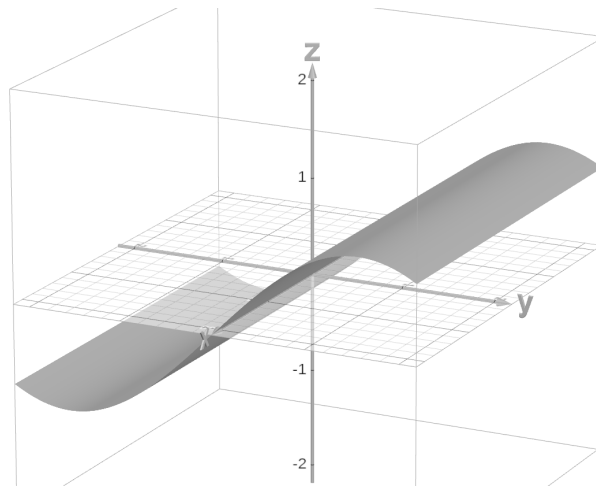


Figure 9: Le graphe de $f(x, y) = \sin(y)$.

Exercice 3. Révisions - calcul de limites à plusieurs variables

Calculer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2}$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|}{x^2 + y^4}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2 + y^4}$

Correction.

1. On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} = \frac{4 - 3}{2 + 2} = \frac{1}{4}$.

2. On utilise les coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi $x^2 + y^2 = r^2$ et donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1 \quad (\text{Fig. 10}).$$

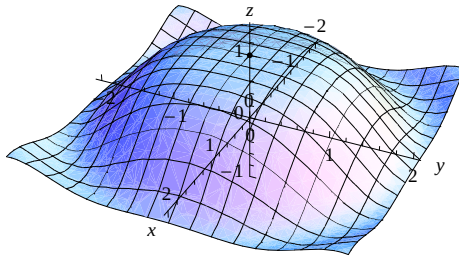


Figure 10: La limite est représentée par le point noir.

3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec $x \neq 0$ on a

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + 0} \right| \leq |y|,$$

et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec $x = 0$ on a $f(x, y) = 0$. On a donc dans tous les cas que $|f(x, y)| \leq |y|$. Soit (x_n, y_n) une suite telle que $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Par la Proposition 2.6 du cours on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n, y_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$. Par la définition de la limite ceci implique que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

4. On a

$$\frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2 + y^4} = \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{1/4}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(y^4)^{1/4}} \leq \sqrt{|y|},$$

et la limite vaut donc zéro.

5. Le long d'une suite épointée de la forme $(x_n, 0)$ on a

$$\frac{|x_n|^{3/2}|0|}{x_n^2 + 0^4} = 0,$$

tandis que le long d'une suite épointée de la forme (y_n^2, y_n) on a

$$\frac{|y_n^2|^{3/2}|y_n|}{y_n^4 + y_n^4} = \frac{1}{2},$$

et la limite n'existe donc pas.

6. On a que

$$\left| \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} \right| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right| \left| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + 0^4} \right| \left| \frac{y^2}{0^4 + y^2} \right| \leq |x|,$$

et la limite vaut donc zéro.

7. On a que

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} = \frac{|x|^{7/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^4 + y^2)^{3/4}},$$

et donc

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} \leq \frac{|x|^{7/2}}{(x^2 + 0^4)(x^4 + 0^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(0^4 + y^2)^{3/4}} \leq \sqrt{|x|},$$

ce qui implique que la limite vaut zéro.

Exercice 4. Révision - prolongement par continuité

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0, 0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x, y) \neq (0, 0)$ est

$$1. f(x, y) = \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

$$2. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + (2x - y)^2}$$

Correction.

1. En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$3x^3 - 2y^3 = r^3 (3 \cos^3(\varphi) - 2 \sin^3(\varphi)) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

et donc

$$f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r (3 \cos^3(\varphi) - 2 \sin^3(\varphi)),$$

et on trouve que pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|f(x, y)| \leq 5r$, ce qui implique que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} 5r = 0,$$

et par conséquence

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Il s'en suit que la fonction $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f en $(0, 0)$. Le graphe de $\hat{f}$ se trouve à la Fig. 11.

2. On considère les limites de deux cas particuliers de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{5x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Par conséquent $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet donc pas de prolongement par continuité en $(0, 0)$ (voir Fig. 12 pour le graphe).

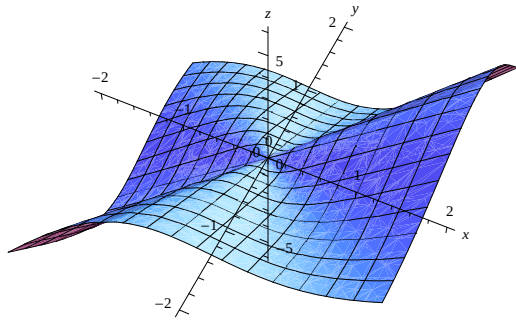


Figure 11

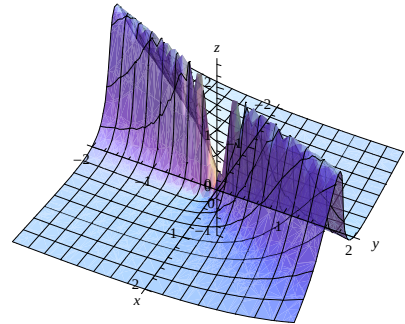


Figure 12

Exercice 5. Révisions - calcul de limite

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y \ln(1 + (x^2 + y^2)^2)}{\exp(\sqrt{x^2 + y^2}) (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Déterminer, si elle existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{(x+1)(y-1)^2 + x^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ existe-t-elle ? Si oui, donner sa valeur.

Correction.

1. On calcule les limites selon les axes x et y . On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \ln(1 + (x^2)^2)}{\exp(\sqrt{x^2}) (x^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

et

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \ln(1 + (y^2)^2)}{\exp(\sqrt{y^2}) (y^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\exp(\sqrt{y^2})} \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + y^4)}{y^4}.$$

La première limite se calcule directement :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\exp(\sqrt{y^2})} = \frac{1}{\exp(0)} = 1.$$

La deuxième limite est de la forme $\frac{0}{0}$ et on peut utiliser Bernoulli-l'Hospital :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4y^3}{1+y^4}}{4y^3} = 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y)$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

Remarque 1: Ci dessus on a pris une suite $y \rightarrow 0$ avec $y > 0$. Si on prenait $y \rightarrow 0$ avec $y < 0$ on aurait obtenu $\lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y) = -1$, du au fait que dans ce cas $\frac{y}{(y^2)^{5/2}} = \frac{\text{sign}(y)}{|y|^4} = \frac{-1}{y^4}$.

Remarque 2: Ceci est une manière de trouver la réponse, mais d'autres méthodes sont aussi possibles. Par exemple, si on prend une suite (x_n, y_n) avec $x_n = 0$ et $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors $f(x_n, y_n)$ s'approche de 1 pour n pair et de -1 pour n impair. Donc la limite n'existe pas.

2. Test le long des droites pour θ fixé :

On passe en coordonnées polaire centrées en $(0, 1)$: $(x, y) = (r \cos \theta, 1 + r \sin \theta)$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, 1 + r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{(r \cos \theta + 1)r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^2}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos \theta \sin^2 \theta + 1 = 1. \end{aligned}$$

Critère des deux gendarmes :

On applique les deux gendarmes en testant si le différence $f(x, y) - 1$ tend vers zéro :

$$0 \leq |f(x, y) - 1| = |f(r \cos \theta, 1 + r \sin \theta) - 1| = |r \cos \theta \sin^2 \theta + 1 - 1| = r \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \underbrace{\sin^2 \theta}_{\leq 1} \leq r \rightarrow 0$$

Par le critère des deux gendarmes, on a que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = 1.$$