

Exercice 1. Pour s'échauffer - représentation de graphes de fonctions

Esquisser le graphe des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous dans un repère en 3 dimensions $Oxyz$.

1. $f(x, y) = 1 - x - y$
2. $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^3$
3. $f(x, y) = \sin(y), y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2. Ensembles de niveaux

Pour chaque fonction ci-dessous :

- Déterminer le domaine de définition et l'image.
- Déterminer les ensembles de niveaux.
- Esquisser quelques-uns de ces derniers.

1. $f(x, y) = xy$
2. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
3. $f(x, y) = \sin(y)$

Exercice 3. Révisions - calcul de limites à plusieurs variables

Calculer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2} |y|^{3/2}}{x^2 + y^4}$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2} |y|}{x^2 + y^4}$
6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}$
7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{7/2} |y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}$

Exercice 4. Révision - prolongement par continuité

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0, 0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x, y) \neq (0, 0)$ est

1. $f(x, y) = \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + (2x - y)^2}$

Exercice 5. Révisions - calcul de limite

1. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y \ln(1 + (x^2 + y^2)^2)}{\exp(\sqrt{x^2 + y^2}) (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Déterminer, si elle existe, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{(x + 1)(y - 1)^2 + x^2}{x^2 + (y - 1)^2}$$

La limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y)$ existe-t-elle ? Si oui, donner sa valeur.

Réponses

Exercice 3.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} = \frac{1}{4}.$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0.$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2} |y|^{3/2}}{x^2 + y^4} = 0.$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2} |y|}{x^2 + y^4}$ n'existe pas.

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} = 0.$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{7/2} |y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} = 0.$

Exercice 4.

1. Oui, en posant $\hat{f}(0,0) = 0.$

2. Non.

Exercice 5.

1. La limite n'existe pas.

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 1.$