

Exercice 1. Pour s'échauffer - Points d'accumulation et point isolé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer que Ω ne contient aucun point isolé. En déduire que si Ω est ouvert, alors $\bar{\Omega} = E$ où E est l'ensemble des points d'accumulation de Ω .

Correction.

Supposons que $x \in \Omega$ et x soit isolé, c'est à dire

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \cap \Omega = \{x\}.$$

Mais on sait de plus que Ω est ouvert, donc $\exists \delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega \Leftrightarrow B(x, \delta) \cap \Omega = B(x, \delta)$. On a trois cas

- Si $\delta = r$, on a une contradiction puisque $B(x, \delta) \cap \Omega = \{x\} \neq B(x, \delta)$.
- Si $r < \delta$, alors en particulier on devrait avoir $B(x, r) \cap \Omega = B(x, r) \neq \{x\}$ ce qui est contradictoire.
- Si $r > \delta$, alors en particulier on devrait avoir $B(x, \delta) \cap \Omega = \{x\} \neq B(x, \delta)$ ce qui est contradictoire.

Puisque $E = \bar{\Omega} \setminus I$ où I est l'ensemble des points isolés (voir cours) et que $I = \emptyset$ si Ω est ouvert, on a bien que $\bar{\Omega} = E$.

Remarque : Ce petit résultat est essentiel, il permet de voir que si Ω est un ouvert et f est définie sur $\bar{\Omega}$, alors on pourra donner une définition pour $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}$ car les points de $\bar{\Omega}$ seront des points "atteignables".

Exercice 2. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ - points d'accumulations et points isolés

Soit $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$. Donner explicitement les ensembles suivants : $\overset{\circ}{X}$, $\bar{X}$, ∂X , l'ensemble des points isolés de X et l'ensemble des points d'accumulation de X . Justifier vos réponses à partir des définitions.

Correction.

Nous basons ici les arguments sur le concept des ensembles ouverts.

1. $\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. En effet, le point $(0, 0)$ est par définition un point isolé de X , et donc $(0, 0) \notin \overset{\circ}{X}$. De plus, l'ensemble $\overset{\circ}{X}$ indiqué est un ensemble ouvert, car si $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{X}$, alors la boule ouverte $B \equiv B((x_0, y_0), \delta)$, où $\delta = \|(x_0, y_0)\| - 1$, satisfait $B \subset \overset{\circ}{X}$, car, pour $(x, y) \in B$ on a :

$$\|(x, y)\| \geq \|(x_0, y_0)\| - \|(x - x_0, y - y_0)\| > \|(x_0, y_0)\| - \delta = 1.$$

L'ensemble $\overset{\circ}{X}$ indiqué est donc bien le plus grand sous-ensemble ouvert de X .

2. $\bar{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$. En effet, le complémentaire de X est l'ensemble $X^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ et avec les mêmes arguments que sous i) on se convainc que l'intérieur de X^c est l'ensemble $\overset{\circ}{X^c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$. Finalement on utilise que $\bar{X} = (\overset{\circ}{X^c})^c$.

3. $\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$, car $\partial X = \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X}$.
4. L'ensemble des points isolés est $\{(0, 0)\}$ (lire la définition correspondante du cours).
5. L'ensemble des points d'accumulation est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} = \bar{X} \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3. Pour "continuer" le "plaisir des epsilons" - Prolongement par continuité

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω . On suppose de plus que f est uniformément continue sur Ω . Montrer que f peut se prolonger par continuité sur $\bar{\Omega}$.

Correction.

Il suffit de montrer que si $a \in \partial\Omega$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Pour cela procédons par la caractérisation par les suites. Considérons une suite $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \Omega$ qui converge vers a et montrons d'abord que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ existe, puis que cette limite ne dépend pas de la suite choisie.

Étape 1 : Choisissons $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \Omega$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ et montrons que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ existe (puisque $a \in \partial\Omega$, on sait qu'il est un point d'accumulation de Ω et donc atteignable par une suite de Ω). Montrons que $(f(x_k))_{k=0}^\infty$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, on doit montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k, m \geq K \Rightarrow |f(x_k) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Puisque f est uniformément continue sur Ω , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Omega$,

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Puisque $x_k \rightarrow a$, la suite est de Cauchy et donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k, m \geq K \Rightarrow \|x_k - x_m\| < \delta$, et donc on a bien $k, m \geq K \Rightarrow \|x_k - x_m\| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(x_m)| < \varepsilon$. Ainsi $(f(x_k))_{k=0}^\infty$ est de Cauchy, il existe donc $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$.

Étape 2 : Montrons que la limite ne dépend pas de $(x_k)_{k=0}^\infty$. Soit $(y_k)_{k=0}^\infty$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$. Par l'étape 1, il existe $\bar{L} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = \bar{L}$.

Montrons que $L = \bar{L}$, soit $|L - \bar{L}| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3.$$

- Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k - y_k = 0$, et il existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_k - y_k\| < \delta, \quad \forall k \geq K_1.$$

- Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$, il existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x_k) - L| < \varepsilon/3, \quad \forall k \geq K_2.$$

- De même, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = \bar{L}$ implique qu'il existe $K_3 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(y_k) - \bar{L}| < \varepsilon/3, \quad \forall k \geq K_3.$$

On conclut donc que pour $k \geq K = \max(K_1, K_2, K_3)$,

$$|L - \bar{L}| \leq |L - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y_k)| + |f(y_k) - \bar{L}| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Exercice 4. Théorème des deux gendarmes

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0 . Supposons que f ne dépende que de la variable x_i pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x_i)$, avec $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$. Supposons que g soit continue en $x_{0,i}$ et soit finalement $L \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} g(x_i) = L.$$

Remarque : le résultat est faux en général si g n'est pas continue. L'implication de gauche à droite est toujours vraie, même si g n'est pas continue, mais l'implication de droite à gauche n'est plus vérifiée. Par exemple, considérons la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

et définissons $f(x, y) = g(x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, pourtant $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. En effet, $f(x, y) = 0$ pour tous les points (x, y) tels que $x \neq 0$, mais est constante à 1 sur l'axe $x = 0$ (donc l'ensemble des points du type $(0, y)$.)

En fait, on observe qu'imposer la continuité de g impose en réalité la continuité de f en x_0 . Dès lors, on peut comprendre que pour une fonction ne dépendant que d'une variable, la limite multivariée correspond à la limite "à une variable" seulement dans le cas d'une fonction continue.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé de x_0 . Supposons qu'il existe un voisinage épointé V de x_0 et deux fonctions g, d définies sur V telles que $\forall x \in V$, $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

3. Dédurre des deux premiers points que s'il existe un voisinage épointé de x_0 et deux fonctions φ_1 et φ_2 dépendantes uniquement de la variable x_i et continue en $x_{0,i}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\forall x \in V$,

$$\varphi_1(x_i) \leq f(x) \leq \varphi_2(x_i),$$

et si

$$\lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} \varphi_1(x_i) = \lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} \varphi_2(x_i) = L \in \mathbb{R},$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Correction.

1. Sans perdre de généralité, supposons que l'on travaille toujours dans un voisinage de x_0 assez petit pour que tout soit bien défini (ceci afin de devoir éviter d'intersecter avec $\mathcal{D}_f$). Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ et soit $\varepsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x_i - x_{0,i}| < \delta \Rightarrow |g(x_i) - L| < \varepsilon.$$

On sait qu'il existe $\delta' > 0$ tel que

$$0 < \|x - x_0\| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En particulier si $\bar{x} = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_i, \dots, x_{0,n}) \in B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}$, on a $|f(\bar{x}) - L| < \varepsilon$. Or $\|\bar{x} - x_0\| = |x_i - x_{0,i}|$ et $|f(\bar{x}) - L| = |g(x_i) - L|$. Il suffit donc de choisir $\delta = \delta'$.

Réciproquement, supposons $\lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} g(x_i) = L$ et soit $\varepsilon > 0$, on doit montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si x satisfait

$$0 < \|x - x_0\| < \delta,$$

alors

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

On sait qu'il existe $\delta' > 0$ tel que

$$|x_i - x_{i,0}| < \delta' \Rightarrow |g(x_i) - L| < \varepsilon.$$

Posons $\delta = \delta'$. Puisque $|x_i - x_{0,i}| \leq \|x - x_0\|$ pour tout x dont la i -ème composante est x_i , on a que si

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |x_i - x_{0,i}| < \delta = \delta',$$

et donc $|g(x_i) - L| = |f(x) - L| < \varepsilon$.

Remarque Ici il est important de remarquer que la continuité de g est cruciale. Si on devait montrer ce résultat pour une fonction g non continue, on devrait montrer que s'il existe $\delta' > 0$ tel que

$$0 < |x_i - x_{i,0}| < \delta' \Rightarrow |g(x_i) - L| < \varepsilon.$$

alors il existe $\delta > 0$ tel que si x satisfait

$$0 < \|x - x_0\| < \delta,$$

alors

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

En reprenant l'argument ci-dessus, il est possible que $\|x - x_0\| > 0$ sans que $|x_i - x_{0,i}| > 0$ (par exemple en considérant une paire de points telle que $x_i = x_{0,i}$.) On ne pourrait donc pas conclure. En demandant la continuité de g en $x_{0,i}$, on autorise la quantité $|x_i - x_{0,i}|$ à être nulle et que l'argument $\varepsilon - \delta$ fonctionne.

2. La preuve est similaire au cas de dimension 1. Soit δ assez petit pour qu'on ait à la fois, pour tout $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

- $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$,
- $|g(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$,
- $|d(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < d(x) < L + \varepsilon$.

On a alors nécessairement, pour tout $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq d(x) < L + \varepsilon$$

donc

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x_i est sa i -ème composante $g(x) = \varphi_1(x_i)$ et $d(x) = \varphi_2(x_i)$. On a par le point 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= \lim_{x_i \rightarrow x_{i,0}} \varphi_1(x_i) = L \text{ et} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) &= \lim_{x_i \rightarrow x_{i,0}} \varphi_2(x_i) = L, \end{aligned}$$

donc par le point 2., $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Exercice 5. Calcul de limite en coordonnées polaires

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé de (x_0, y_0) . Soit $L \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = L, \text{ uniformément par rapport à } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Correction.

Supposons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$. On doit montrer que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout θ

$$0 < r < \delta \Rightarrow |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| < \varepsilon$$

Notons que dans la phrase "il existe $\delta > 0$ tel que pour tout θ ", θ arrivant après δ signifie que ce dernier ne dépend pas de θ . Soit δ' tel que $0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta' \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$ et posons $\delta = \delta'$. Si $(x,y) = (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$. On a $\|(x,y) - (x_0, y_0)\| = r$ et donc on a bien

$$0 < r < \delta \Rightarrow \|(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| < \varepsilon.$$

Ici clairement $\delta = \delta'$ ne dépend que de x_0, L et f .

Réciproquement, supposons que $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = L$ uniformément par rapport à $\theta \in [0, 2\pi[$ c'est à dire, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout θ

$$0 < r < \delta' \Rightarrow |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| < \varepsilon$$

(NB. δ' ici ne dépend donc pas de θ). Montrons qu'il existe δ tel que

$$(x,y) \in B((x_0, y_0), \delta) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Posons $\delta = \delta'$. Soit (x,y) et r, θ tels que $(x,y) = (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$. Comme $(x,y) \in B((x_0, y_0), \delta) \setminus \{(x_0, y_0)\}$, on a nécessairement que $r < \delta$ et donc

$$(x,y) \in B((x_0, y_0), \delta) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow 0 < r < \delta \Rightarrow |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Noter ici que la subtilité est de pouvoir poser $\delta = \delta'$ car δ' ne dépend pas de θ . Si $\delta' = \delta'(\theta)$ est une fonction de θ , alors on devrait poser $\delta = \inf_{\theta \in [0, 2\pi[} \delta'(\theta)$ mais cet inf pourrait valoir zéro.

Exercice 6. Point fixe de Banach, révisions sur les suites

Soit $f : \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que f est Lipschitz de constante $L \geq 0$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Si $L < 1$, on dit que f est strictement contractante. Montrer que si f est strictement contractante, alors il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Indication : Prendre un $a \in \mathbb{R}^n$ quelconque et définir la suite

$$\begin{cases} x_0 &= a \\ x_{k+1} &= f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Commencer par montrer que cette suite est de Cauchy, puis que sa limite $\bar{x}$ satisfait $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Correction.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, définissons la suite

$$\begin{cases} x_0 &= a \\ x_{k+1} &= f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On montre que $(x_k)_{k=0}^\infty$ est de Cauchy. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &= \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq L^k\|x_1 - x_0\| \\ &= L^k\|f(x_0) - x_0\|.\end{aligned}$$

Soient $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $k > m$.

$$\begin{aligned}\|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq (L^{k-1} + L^{k-2} + \cdots + L^m)\|f(x_0) - x_0\| \\ &= L^m(L^{k-1-m} + L^{k-2-m} + \cdots + 1)\|f(x_0) - x_0\| \\ &= L^m \frac{1 - L^{k-m}}{1 - L} \|f(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{L^m}{1 - L} \|f(x_0) - x_0\| \quad (L < 1) \\ &\rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty\end{aligned}$$

donc $(x_k)_{k=0}^\infty$ est de Cauchy. Par conséquent, elle converge et on pose $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Nous verrons prochainement que f étant de Lipschitz, elle est continue et donc on a

$$f(\bar{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \bar{x}.$$

On peut cependant montrer que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ sans ce résultat. Montrer que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ est équivalent à montrer que $\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| &\leq \|f(\bar{x}) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - \bar{x}\| \\ &\leq L\|\bar{x} - x_k\| + \|x_{k-1} - \bar{x}\|\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit K suffisamment grand pour que

$$k \geq K - 1 \Rightarrow \|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon/2.$$

On a donc $\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leq L\varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$.

De plus $\bar{x}$ est unique : supposons que $\bar{y} \neq \bar{x}$ soit aussi un point fixe de f , alors

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\| \leq L\|\bar{x} - \bar{y}\| < \|\bar{x} - \bar{y}\|,$$

ce qui est contradictoire, donc $\bar{y} = \bar{x}$.