

Exercice 1. Pour s'échauffer - Points d'accumulation et point isolé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer que Ω ne contient aucun point isolé. En déduire que si Ω est ouvert, alors $\bar{\Omega} = E$ où E est l'ensemble des points d'accumulation de Ω .

Exercice 2. Sous-ensembles de \mathbb{R}^n - points d'accumulations et points isolés

Soit $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$. Donner explicitement les ensembles suivants : $\overset{\circ}{X}$, \bar{X} , ∂X , l'ensemble des points isolés de X et l'ensemble des points d'accumulation de X . Justifier vos réponses à partir des définitions.

Exercice 3. Pour "continuer" le "plaisir des epsilons" - Prolongement par continuité

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω . On suppose de plus que f est uniformément continue sur Ω . Montrer que f peut se prolonger par continuité sur $\bar{\Omega}$.

Exercice 4. Théorème des deux gendarmes

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0 . Supposons que f ne dépende que de la variable x_i pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x_i)$, avec $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$. Supposons que g soit continue en $x_{0,i}$ et soit finalement $L \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} g(x_i) = L.$$

Remarque : le résultat est faux en général si g n'est pas continue. L'implication de gauche à droite est toujours vraie, même si g n'est pas continue, mais l'implication de droite à gauche n'est plus vérifiée. Par exemple, considérons la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

et définissons $f(x, y) = g(x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, pourtant $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. En effet, $f(x, y) = 0$ pour tous les points (x, y) tels que $x \neq 0$, mais est constante à 1 sur l'axe $x = 0$ (donc l'ensemble des points du type $(0, y)$.)

En fait, on observe qu'imposer la continuité de g impose en réalité la continuité de f en x_0 . Dès lors, on peut comprendre que pour une fonction ne dépendant que d'une variable, la limite multivariée correspond à la limite "à une variable" seulement dans le cas d'une fonction continue.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé de x_0 . Supposons qu'il existe un voisinage épointé V de x_0 et deux fonctions g, d définies sur V telles que $\forall x \in V$, $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

3. Déduire des deux premiers points que s'il existe un voisinage épointé de x_0 et deux fonctions φ_1 et φ_2 dépendantes uniquement de la variable x_i et continue en $x_{0,i}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\forall x \in V$,

$$\varphi_1(x_i) \leq f(x) \leq \varphi_2(x_i),$$

et si

$$\lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} \varphi_1(x_i) = \lim_{x_i \rightarrow x_{0,i}} \varphi_2(x_i) = L \in \mathbb{R},$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Exercice 5. Calcul de limite en coordonnées polaires

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé de (x_0, y_0) . Soit $L \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = L, \text{ uniformément par rapport à } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Exercice 6. Point fixe de Banach, révisions sur les suites

Soit $f : \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que f est Lipschitz de constante $L \geq 0$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Si $L < 1$, on dit que f est strictement contractante. Montrer que si f est strictement contractante, alors il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Indication : Prendre un $a \in \mathbb{R}^n$ quelconque et définir la suite

$$\begin{cases} x_0 & = a \\ x_{k+1} & = f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Commencer par montrer que cette suite est de Cauchy, puis que sa limite \bar{x} satisfait $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Réponses

Exercice 2.

1. $\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.
2. $\overline{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$.
3. $\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.
4. $\{(0, 0)\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.