Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 2

Exercice 1.
Soit K un corps et $R \subset K$ un sous-anneau.

1. Montrer que R est intègre.

2. Montrer que si pour tout élément de $k \in K$ il existe $r \in R$ non-nul tel que $rk \in R$, alors l'application naturelle $\mathrm{Frac}(R) \to K$ est un isomorphisme.

3. Les inclusions suivantes sont-elles l'inclusion d'un anneau dans son corps des fractions ? L'anneau R est supposé intègre.

   (a) $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Q}[i]$
   (b) $\mathbb{Z}[t] \subset \mathbb{Q}[t]$
   (c) $R[x, y] \subset K(x, y)$ si $K = \mathrm{Frac}(R)$.

Exercice 2.
Prouvez les affirmations suivantes.

1. Un anneau A dans lequel $a = a^2$ pour tout $a \in A$, est commutatif.

2. Un anneau intègre et fini est un corps.

3. Soit K un corps et A un anneau commutatif.

   (a) Soit $K \to A$ un morphisme d'anneau. Montrez que multiplier par l'image des éléments de K fait de A un K-espace vectoriel avec son addition qui vient de la structure d'anneau de A.
   (b) Si maintenant A est intègre et de dimension finie en tant qu'espace vectoriel avec la structure ci-dessus, montrez que A est un corps.

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

(a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A, alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A.

(b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K.

(c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.

(e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 4.
Soit G un groupe fini non-trivial. Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[G]$.

1. Supposons que $g \in G$ soit non-trivial et que $g^2 = e$. Montrez que $1 - g$ et $1 + g$ sont des diviseurs de zéro.
2. Plus généralement, montrez que si $g \in G$ est non-trivial, alors $1 - g$ est un diviseur de zéro.

Exercice 5.
Montrez qu'il existe exactement 4 morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Indication : si $f\colon \mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *est un homomorphisme, étudiez les images possibles des éléments de* S_3*.*