

Exercices – Semaine 2

Exercice 1.

Soit K un corps et $R \subset K$ un sous-anneau.

1. Montrer que R est intègre.
2. Montrer que si pour tout élément de $k \in K$ il existe $r \in R$ non-nul tel que $rk \in R$, alors l'application naturelle $\text{Frac}(R) \rightarrow K$ est un isomorphisme.
3. Les inclusions suivantes sont-elles l'inclusion d'un anneau dans son corps des fractions ? L'anneau R est supposé intègre.
 - (a) $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Q}[i]$
 - (b) $\mathbb{Z}[t] \subset \mathbb{Q}[t]$
 - (c) $R[x, y] \subset K(x, y)$ si $K = \text{Frac}(R)$.

Exercice 2.

Prouvez les affirmations suivantes.

1. Un anneau A dans lequel $a = a^2$ pour tout $a \in A$, est commutatif.
2. Un anneau intègre et fini est un corps.
3. Soit K un corps et A un anneau commutatif.
 - (a) Soit $K \rightarrow A$ un morphisme d'anneau. Montrez que multiplier par l'image des éléments de K fait de A un K -espace vectoriel avec son addition qui vient de la structure d'anneau de A .
 - (b) Si maintenant A est intègre et de dimension finie en tant qu'espace vectoriel avec la structure ci-dessus, montrez que A est un corps.

Exercice 3.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

- (a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A , alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A .
- (b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K .
- (c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.
- (d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.
- (e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K , alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.
- (f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K , alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 4.

Soit G un groupe fini non-trivial. Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[G]$.

1. Supposons que $g \in G$ soit non-trivial et que $g^2 = e$. Montrez que $1 - g$ et $1 + g$ sont des diviseurs de zéro.
2. Plus généralement, montrez que si $g \in G$ est non-trivial, alors $1 - g$ est un diviseur de zéro.

Exercice 5.

Montrez qu'il existe exactement 4 morphismes 4 homomorphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[S_3] \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Indication : si $f: \mathbb{Z}[S_3] \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est un homomorphisme, étudiez les images possibles des éléments de S_3 .