

Exercice 1. Pour s'échauffer - calcul de limites à plusieurs variables

Déterminer, pour chacune des fonctions ci-dessous, celles qui admettent une limite en $(0,0)$ et le cas échéant calculer cette dernière.

$$1. f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$3. f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^8}$$

Correction.

on rappelle l'approche générale pour calculer ce genre de limite :

- Tester le long de droites passant par $(0,0)$, soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées polaires. Si deux directions ont des limites différentes, la limite en $(0,0)$ n'existe pas. Si toutes les directions ont la même limite, il y a une chance que la limite en $(0,0)$ existe.
- Dans le cas où toutes les directions ont la même limite, on vérifie par le théorème des deux gendarmes, soit en coordonnées polaires, soit en coordonnées cartésiennes, si la limite est la même quelque soit le chemin.
- On rappelle qu'il n'est pas suffisant que la limite soit la même le long de toute droite pour que cette dernière existe. **La limite doit être la même quelque soit la manière d'approcher le point.** Il faut donc vérifier par les deux gendarmes (ou observer en coordonnées polaires que la fonction ne dépend pas de θ).

1. En coordonnée cartésienne :

Test le long des droites $y = cx$: On doit calculer

$$\lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} f(x, cx) = \lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} cx^2 \frac{x^2 - c^2 x^2}{x^2 + c^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} c \frac{x^2 - c^2 x^2}{1 + c^2} = 0.$$

La limite est la même quelque soit la direction, on vérifie que c'est la même quelque soit le chemin en appliquant les deux gendarmes

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| &= \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} - \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \frac{|x^3 y|}{x^2 + y^2} + \frac{|xy^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3 y|}{x^2} + \frac{|xy^3|}{y^2} = 2|xy| \end{aligned}$$

Or la fonction $|xy|$ est continue et tend vers 0 quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Donc par les deux gendarmes

$$\left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$$

tend vers 0 et donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

En coordonnée polaire (l'estimation pour ce genre de fonction est un peu plus directe) :

Test le long des droites, c'est-à-dire θ fixé : on écrit $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos \theta r \sin \theta \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

On observe que la limite est la même quelque soit θ (c'est-à-dire le long de toute droite passant par l'origine). On vérifie que la limite est bien 0 par les deux gendarmes. On a

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r^2 |\cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)| \leq r^2 \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \underbrace{|\sin \theta|}_{\leq 1} |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| \\ &\leq r^2 (\underbrace{|\cos^2 \theta|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin^2 \theta|}_{\leq 1}) \leq 2r^2. \end{aligned}$$

Or $\lim_{r \rightarrow 0^+} 2r^2 = 0$, on a donc bien le résultat :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

2. En coordonnée cartésienne :

Test le long de $y = 0$ et $x = y$:

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 0^2}{x^2 0^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

et

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Les limites sont différentes donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

Si on ne voit pas tout de suite quelles droites choisir posons $y = cx$ et calculons

$$\lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} f(x, cx) = \lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 c^2 x^2}{x^2 c^2 x^2 + x^2 (1 - c^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2 x^4}{c^2 x^4 + x^2 (1 - c^2)}.$$

On observe que $f(x, cx)$ tend vers 0 si $c = 0$ et vers 1 si $c = 1$.

En coordonnée polaires :

Test le long des droites, c'est-à-dire θ fixé :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + (r \cos \theta - r \sin \theta)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta \sin \theta}. \end{aligned}$$

Remarquons à ce stade que si $1 - 2 \cos \theta \sin \theta \neq 0$, alors, la limite donne 0, tandis que si $1 - 2 \cos \theta \sin \theta = 0$ (si $\theta = \pi/4$, $\cos \theta = \sin \theta = 1/\sqrt{2}$ ou si $\theta = 5\pi/4$, $\cos \theta = \sin \theta = -1/\sqrt{2}$) la limite donne 1.

Comme avant, comme les limites sont différentes on a que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

3. En coordonnée cartésienne :

Test le long des droites $y = cx$:

$$\lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} f(x, cx) = \lim_{(x,cx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 cx}{x^4 + c^8 x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^5}{x^4 + cx^8} = 0.$$

La limite est la même selon toutes les directions, on vérifie qu'elle est la même selon tous les chemins à l'aide des deux gendarmes :

$$0 \leq \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^8} \right| \leq \frac{x^4 |y|}{x^4} = |y|.$$

Or $\lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$ et donc $\left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^8} \right|$ tend vers zéro par les deux gendarmes, et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

En coordonnée polaire :

Teste le long des droites, c'est-à-dire θ fixé :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^5 \cos^4 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^4 \theta + r^8 \sin^8 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\cos^4 \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + r^4 \sin^8 \theta} = 0$$

Comme la limite est la même pour tout θ , on peut tenter de vérifier que la limite existe par les deux gendarmes :

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \left| r \frac{\cos^4 \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + r^4 \sin^8 \theta} \right| \leq r \frac{\cos^4 \theta |\sin \theta|}{\cos^4 \theta} = r |\sin \theta| \leq r.$$

Or $\lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0$, on a donc bien $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice 2. Continuité

Trouver la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

soit continue en $(0,0)$.

Indication : utiliser les coordonnées polaires.

Correction.

Il s'agit de vérifier si $f(x,y)$ a une limite en $(0,0)$ et si oui, on fixera α à cette dernière.

Testons les différentes directions en coordonnées polaires. Pour θ fixé, on a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(r)}{r^2} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r)}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Or $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r)}{2r}$ ne dépend pas de θ , par conséquent on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, si $\alpha = \frac{1}{2}$, on a que f est également continue en 0 et donc continue.

Exercice 3. Continuité

Pour quelles valeurs de $\alpha \in [0,1]$, la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est-elle continue en $(0,0)$?

Indication : utiliser les coordonnées polaires et séparer les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

Correction.

Il s'agit de vérifier pour quel α a-t-on $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. On étudie la situation en coordonnée polaire en testant le long de droites (θ est fixé) :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2(1-\alpha)} \cos(\theta) \sin(\theta).$$

On observe que pour $\alpha = 1$, la limite vaut $\cos(\theta) \sin(\theta)$ et donc est différente selon le choix de θ . Par exemple, la limite est 0 pour $\theta = 0$, mais vaut $\frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent, la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ pour $\alpha = 1$, n'existe pas et donc f ne peut pas être continue en $(0,0)$.

Par contre pour $0 \leq \alpha < 1$, en appliquant les deux gendarmes, on a

$$0 \leq |f(x,y)| = |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| = \left| r^{2(1-\alpha)} \cos(\theta) \sin(\theta) \right| \leq r^{2(1-\alpha)}.$$

Or pour $\alpha \in [0,1[$, on a $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2(1-\alpha)} = 0$. Par conséquent, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

et f est bien continue en $(0,0)$.

Exercice 4. Existence de limite pour une fonction à plusieurs variables

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

1. Montrer que le long de toute les droites qui passent par l'origine, la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ est 0.
2. Calculer la limite le long de la courbe $(x, \sqrt{x})$.
3. En déduire que la limite en $(0,0)$ de f n'existe pas.

Correction.

1. En coordonnée polaire, on a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^4 \sin^4(\theta)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^2 \sin^4(\theta)}$$

Remarquons à ce stade que si $\cos(\theta) = 0$, $\sin(\theta) = \pm 1 \neq 0$ et $\frac{\cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^2 \sin^4(\theta)} = 0$ et donc

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0.$$

Et si $\cos(\theta) \neq 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0 \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = 0.$$

Par conséquent, le long de toute droite la limite vaut 0.

2. On a

$$\lim_{(x,\sqrt{x}) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Comme la limite est différente selon le chemin suivi, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

n'existe pas.

Exercice 5. Exercice de révisions - courbes paramétrées

On considère la trajectoire Γ paramétrée par $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

1. Calculer le vecteur dérivé $\dot{\gamma}(t)$.
2. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $(1, 0)$.
3. Calculer la longueur de Γ

Correction.

Notons $x(t) = e^t \cos(t)$ et $y(t) = e^t \sin(t)$

1. On a $\dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t)) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\cos(t) + \sin(t)))$.
2. On a $\gamma(0) = (1, 0)$. Le vecteur tangent en $(1, 0)$ est $\dot{\gamma}(0) = (1, 1)$. L'équation de la tangente à Γ est donnée par

$$t_\Gamma : y - 0 = m(x - 1) \text{ avec } m = \frac{y'(0)}{x'(0)} = 1$$

d'où

$$t_\Gamma : y = x - 1.$$

3. On utilise la formule

$$\text{long}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} (\cos^2(t) - 2 \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2 \sin(t) \cos(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}e^t. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{long}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}[e^t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}e^{2\pi} - \sqrt{2}.$$