

Exercice 1. Pour s'échauffer - calcul de limites à plusieurs variables

Déterminer, pour chacune des fonctions ci-dessous, celles qui admettent une limite en $(0,0)$ et le cas échéant calculer cette dernière.

$$1. f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$3. f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^8}$$

Exercice 2. Continuité

Trouver la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

soit continue en $(0, 0)$.

Indication : utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 3. Continuité

Pour quelles valeurs de $\alpha \in [0, 1]$, la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

est-elle continue en $(0, 0)$?

Indication : utiliser les coordonnées polaires et séparer les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

Exercice 4. Existence de limite pour une fonction à plusieurs variables

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

1. Montrer que le long de toute les droites qui passent par l'origine, la limite de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ est 0.
2. Calculer la limite le long de la courbe $(x, \sqrt{x})$.
3. En déduire que la limite en $(0, 0)$ de f n'existe pas.

Exercice 5. Exercice de révisions - courbes paramétrées

On considère la trajectoire Γ paramétrée par $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

1. Calculer le vecteur dérivé $\dot{\gamma}(t)$.
2. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $(1, 0)$.
3. Calculer la longueur de Γ

Réponses

Exercice 1.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$

Exercice 2.

$$\alpha = 1/2.$$

Exercice 3.

$$0 \leq \alpha < 1.$$

Exercice 5.

1. $\dot{\gamma}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t)).$
2. $t_\Gamma : y = x - 1.$
3. $\text{long}(\Gamma) = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1).$