

Exercice 1. Pour s'échauffer - réflexion sur la notion de continûment différentiable sur un fermé

La définition d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est assez naturelle. On demande que f soit dérivable sur $]a, b[$ et on définit sa fonction dérivée g qui à tout $x \in]a, b[$ associe comme image $g(x)$ que l'on définit comme $g(x) = f'(x)$ où $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est le nombre dérivé. Par abus de langage pratique, on note g comme f' . Pour que $f \in C^1(]a, b[)$, on demande alors que $f' \in C^0]a, b[$.

Si on travaille à présent sur le fermé $[a, b]$, il faut d'abord réfléchir à ce qu'on entend par une fonction dérivable sur le fermé, plus précisément comme définir f' sur le fermé, la notion de dérivée étant de prime abord construite sur les ouverts. La clef est de réfléchir à la notion de dérivabilité dans les bornes a et b . Il y a plusieurs manières de penser la dérivabilité en ces points et ensuite de penser la continuité de la fonction dérivée jusqu'au bornes de l'intervalle.

On donne ici deux définitions de l'espace $C^1([a, b])$:

Définition 1 : on dit que $f \in C^1([a, b])$ si $f \in C^0([a, b]) \cap C^1(]a, b[)$ et si la fonction dérivée $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en a et b .

Définition 2 : on dit que $f \in C^1([a, b])$ si

- f est dérivable sur $[a, b]$ où on définit sa dérivée sur $[a, b]$ comme

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x \in]a, b[\\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x = a, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x = b, \end{cases}$$

- $f' \in C^0([a, b])$

Le but de cet exercice est de montrer que ces deux définitions sont équivalentes, c'est-à-dire que f est C^1 sur $[a, b]$ au sens de la définition 1 si et seulement si elle l'est au sens de la définition 2.

Correction.

Etape 1 : montrons que si $f \in C^1([a, b])$ au sens de la définition 1, elle est l'est au sens de la définition 2. Si f répond à la définition 1, alors f' est prolongeable par continuité en a et en b . Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ existent. Comme la fonction est continue en a et b , ces limites valent respectivement la dérivée à droite $f'_d(a)$ et la dérivée à gauche $f'_g(b)$, et donc f est dérivable sur $[a, b]$ et on a de plus que automatiquement que $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in [a, b]$ (f' est continue sur l'ouvert par hypothèse).

Etape 2 : Si f est $C^1([a, b])$ au sens de la définition 2 on a que f est dérivable sur $[a, b]$ et donc on a f continue sur $[a, b]$. De plus, on a automatiquement que $f \in C^1(]a, b[)$ puisque f' est continue sur le fermé, donc sur l'ouvert. Et comme elle est continue jusqu'en a et b , on a trivialement son prolongement en a et b .

Exercice 2. Pour s'échauffer un peu plus - Équivalence injectivité-monotonie

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

En déduire que si $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est une fonction $C^1([a, b])$ telle que $[c, d] = f([a, b])$ et $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, alors f est bijective de $[a, b]$ dans $[c, d]$ et $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une fonction $C^1([c, d])$ telle que $(f^{-1})'(y) \neq 0, \forall y \in [c, d]$.

Remarque : On appelle un tel f un difféomorphisme.

Correction.

$\Leftarrow$: Soit $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$. On a soit $x < y$ soit $x > y$, donc, par stricte monotonie de f , soit $f(x) < f(y)$ soit $f(x) > f(y)$, donc $f(x) \neq f(y)$, ainsi f est injective.

$\Rightarrow$: Soient $x, y, z \in [a, b]$, $x < y < z$. Sans perte de généralité, quite à considérer $-f$, supposons que $f(x) < f(y)$ (f injective, donc forcément $f(x) \neq f(y)$). Montrons que $f(y) < f(z)$ ce qui prouve que f est strictement croissante.

Par l'absurde, supposons que $f(y) > f(z)$. Comme f est continue, $f([x, y])$ et $f([y, z])$ sont des intervalles et $[f(x), f(y)] \subset f([x, y])$ et $[f(z), f(y)] \subset f([y, z])$, donc $[f(x), f(y)] \cap [f(z), f(y)] \neq \emptyset$. Soit alors $c \in [f(x), f(y)] \cap [f(z), f(y)]$, il existe $x_1 \in [x, y[$ tel que $f(x_1) = c$ et $x_2 \in]y, z]$ tel que $f(x_2) = c$ mais $x_1 \neq x_2$ ce qui est contradictoire avec l'injectivité de f .

Soit à présent $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$, où $f([a, b]) = [c, d]$, une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Puisque f' ne s'annule pas et f' est continue, alors on a soit $f' > 0$ soit $f' < 0$. Dans tous les cas, ceci implique que f est strictement monotone donc bijective. On peut donc définir $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ et on a par les formules de dérivation

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \neq 0, \forall y \in [c, d]$$

(En prenant en compte que si $y = c$ ou $y = d$, alors on doit considérer la dérivée à gauche ou la dérivée à droite).

Exercice 3. Abscisse curviligne

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple, régulière et $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ . On appelle abscisse curviligne la fonction $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, \text{long}(\Gamma)]$ définie par $\sigma(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds$. Montrer que σ est un difféomorphisme de $[a, b]$ dans $[0, \text{long}(\Gamma)]$, c'est à dire

1. $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, \text{long}(\Gamma)]$ est bijective.
2. $\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b])$.
3. $\dot{\sigma}(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Indication : Montrer que σ est dérivable sur $[a, b]$ et que $\dot{\sigma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$, $\forall t \in [a, b]$.

Correction.

1. Pour vérifier l'injectivité, prenons $t_1, t_2 \in [a, b]$ tels que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ et montrons que $t_1 = t_2$.

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) \Rightarrow \int_a^{t_1} \|\dot{\gamma}(s)\| ds - \int_a^{t_2} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = 0.$$

Supposons, sans perte de généralité, que $t_2 \geq t_1$. Alors, soit $t_2 > t_1$, et comme $\|\dot{\gamma}(s)\| \geq 0$, alors $\|\dot{\gamma}(s)\| = 0$ pour tout $s \in [t_1, t_2]$, ce qui est impossible (γ est une paramétrisation régulière), soit $t_1 = t_2$ et σ est injective.

σ étant une application continue (car intégrale d'une fonction continue) et injective, elle est strictement monotone (plus précisément strictement croissante puisque $\|\dot{\gamma}(s)\| > 0$) et donc par le théorème de la valeur intermédiaire, σ est surjective dans $[\sigma(a), \sigma(b)] = [0, \text{long}(\Gamma)]$.

2. Comme $\dot{\gamma} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a $\|\dot{\gamma}\| \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et donc par les propriétés de l'intégrale de Riemann, σ est dérivable pour tout $t \in]a, b[$, avec $\dot{\sigma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$. De plus,

$$\dot{\sigma}_d(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\sigma(t) - \sigma(a)}{t - a} \quad \underbrace{=}_{\text{Hospital ou thm de la moyenne}} \quad \lim_{t \rightarrow a^+} \dot{\sigma}(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \|\dot{\gamma}(t)\| = \|\dot{\gamma}(a)\|.$$

De même, $\dot{\sigma}_g(b) = \|\dot{\gamma}(b)\|$. Ainsi, σ est dérivable sur $[a, b]$ et $\dot{\sigma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$, $\forall t \in [a, b]$. Comme $\dot{\gamma} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ on a immédiatement $\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

3. Comme γ est une paramétrisation régulière, on a immédiatement que $\dot{\sigma}(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Exercice 4. Bijection par l'abscisse curviligne

Montrer que l'abscisse curviligne d'une courbe Γ simple, régulière et non fermée par une paramétrisation simple et régulière $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ permet de construire une bijection entre $[0, \text{long}(\Gamma)]$ et Γ .

Indication : Considérer la paramétrisation, dite paramétrisation par la longueur de l'arc, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}$ avec $\sigma^{-1} : [0, \text{long}(\Gamma)] \rightarrow [a, b]$ où σ est l'abscisse curviligne donnée par γ .

Cet exercice montre qu'il existe une paramétrisation "naturelle" d'une courbe en la paramétrisant par la longueur du chemin pour aller d'une extrémité à un point donné. C'est par exemple ainsi que l'on définit le cercle trigonométrique en le paramétrisant par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Remarque : Dans le cas d'une courbe Γ fermée, on devrait considérer uniquement la bijection de $[a, b[\rightarrow \Gamma$ ou $]a, b] \rightarrow \Gamma$.

Correction.

On a clairement que $\text{Im}(\tilde{\gamma}) = \Gamma$. De plus, $\tilde{\gamma}$ est injective car composition de fonctions injectives (γ est simple, donc injective sur $]0, \text{long}(\Gamma)[$, de plus puisque Γ est non fermée, on a en fait $\tilde{\gamma}$ est injective sur $[0, \text{long}(\Gamma)]$).

Exercice 5. Équivalence entre courbes

Dans la série 2-A, on définit l'équivalence entre deux paramétrisations régulières comme: $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{R}^n)$ sont équivalentes s'il existe $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, bijective et $\mathcal{C}^1([a, b])$ telle que $\phi(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$ et $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière. Montrer que si $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{R}^n)$ sont deux paramétrisations simples et régulières de Γ alors γ_1 et γ_2 sont équivalentes.

Correction.

Il s'agit d'identifier un difféomorphisme $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Considérons σ_1 l'abscisse curviligne de γ_1 et σ_2 l'abscisse curviligne de γ_2 , et définissons $\phi = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$.

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \xrightarrow{\sigma_1} & [0, \text{long}(\Gamma)] & \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} & [c, d] \\ & & \searrow \phi = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 & \nearrow & \end{array}$$

ϕ est un difféomorphisme car composition de difféomorphismes (composition de fonctions $\mathcal{C}^1$, bijectives, à dérivées non nulles). De plus $\forall t \in [a, b]$, on a $\gamma_1(t) = (\gamma_2 \circ \phi)(t)$. En effet, par construction $\sigma_1(t)$ donne la longueur de la courbe entre $\gamma_1(a)$ et $\gamma_1(t)$ et $\sigma_2^{-1}(\sigma_1(t))$ donne l'instant $s \in [c, d]$ pour laquelle $\gamma_2(s)$ est le point de Γ situé à longueur $\sigma_1(t)$ de $\gamma(a)$, donc le point $\gamma_1(t)$.

Exercice 6. Indépendance de la paramétrisation

Soit Γ une courbe simple, régulière et soit $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a_1, b_1], \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([a_2, b_2], \mathbb{R}^n)$ deux paramétrisations simples et régulières de Γ . Supposons que $\gamma_1 \sim \gamma_2$, i.e. il existe $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, $\phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a_1, b_1]$, ϕ bijective et $\mathcal{C}^1([a_1, b_1])$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Montrer que $\text{long}(\gamma_1) = \text{long}(\gamma_2)$ où $\text{long}(\gamma_i) = \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\gamma}_i(t)\| dt$, $i \in \{1, 2\}$.

Correction.

On a $\text{long}(\gamma_2) = \int_{a_2}^{b_2} \|\dot{\gamma}_2(s)\| ds$. Posons $s = \phi(t)$. Par la formule de changement de variable, on a

$$\int_{a_2}^{b_2} \|\dot{\gamma}_2(s)\| ds = \int_{\phi^{-1}(a_2)}^{\phi^{-1}(b_2)} \|\dot{\gamma}_2(\phi(t))\| |\dot{\phi}(t)| dt.$$

La fonction $\dot{\phi}$ étant continue et ne s'annulant pas, elle est de signe constant. Si $\dot{\phi}(t) > 0$, alors on a ϕ strictement croissante,

$$\int_{a_2}^{b_2} \|\dot{\gamma}_2(s)\| ds = \int_{a_1}^{b_1} \|\dot{\gamma}_2(\phi(t))\| \cdot |\dot{\phi}(t)| dt = \int_{a_1}^{b_1} \|(\gamma_2 \circ \phi)'(t)\| dt = \int_{a_1}^{b_1} \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt.$$

Si $\dot{\phi}(t) < 0$, alors on a ϕ strictement décroissante et

$$\int_{a_2}^{b_2} \|\dot{\gamma}_2(s)\| ds = \int_{b_1}^{a_1} \|\dot{\gamma}_2(\phi(t))\| (-|\dot{\phi}(t)|) dt = - \int_{b_1}^{a_1} \|(\gamma_2 \circ \phi)(t)\| dt = \int_{a_1}^{b_1} \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt.$$

Exercice 7. Accroissements finis généralisés - applications aux courbes

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple, régulière, non fermée, paramétrisée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ simple et régulière. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à Γ au point $\gamma(c)$ soit parallèle à la droite sécante allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$.

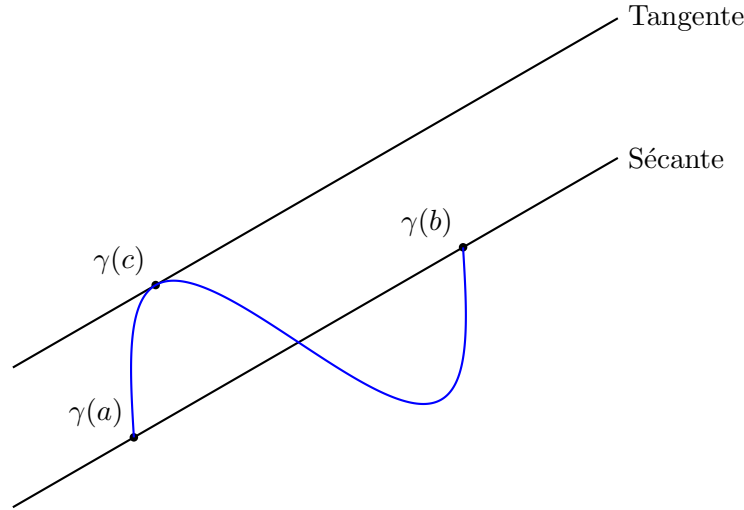


Figure 1: La courbe Γ en bleu.

Correction.

Puisque $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est $\mathcal{C}^1$, γ_1 et γ_2 sont $\mathcal{C}^1$ et donc par le théorème des accroissements finis généralisé, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\dot{\gamma}_2(c)}{\dot{\gamma}_1(c)} = \frac{\gamma_2(b) - \gamma_2(a)}{\gamma_1(b) - \gamma_1(a)}.$$

Or $\frac{\dot{\gamma}_2(c)}{\dot{\gamma}_1(c)}$ est la pente de la tangente et $\frac{\gamma_2(b) - \gamma_2(a)}{\gamma_1(b) - \gamma_1(a)}$ celle de la sécante. Ces deux droites sont donc parallèles.

Remarque : le théorème des accroissements finis généralisé signifie géométriquement que pour se déplacer en moyenne d'un point A à un point B , il faut à un instant donné se déplacer dans la direction $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 8. Formule pour le calcul de la longueur d'une courbe

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple et régulière paramétrisée par $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ simple et régulière. On a vu que la formule $\text{long}(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds$ pouvait se comprendre comme la limite du processus d'approximation suivant: on partitionne $[a, b]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ construits comme:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b,$$

avec $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ et on considère l'approximation de $\text{long}(\Gamma)$ comme $\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ où $\overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} = \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ est la longueur du segment $\gamma(t_i)$ à $\gamma(t_{i+1})$. On a vu en cours qu'en considérant le développement limité

$$\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) + \Delta t_i \dot{\gamma}(t_i) + \Delta t_i r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})$$

avec

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1}) = 0,$$

on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\|$$

et

$$\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \geq \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| - \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\|.$$

Si on suppose que $\max_{i=0, \dots, N} \Delta t_i \rightarrow 0$ si $N \rightarrow \infty$ on a remarqué que sous l'hypothèse que γ_1 et γ_2 sont C^2 , alors la quantité:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty$$

et de par le théorème des deux gendarmes

$$\sum_{i=1}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

On propose ici de montrer que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty$$

en supposant uniquement que $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([a, b])$.

Correction.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on va montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geq M$, alors

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \leq \varepsilon$$

Comme vu en cours, on peut écrire:

$$\|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \leq \left| \dot{\gamma}_1(t_i) - \frac{\gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i)}{\Delta t_i} \right| + \left| \dot{\gamma}_2(t_i) - \frac{\gamma_2(t_{i+1}) - \gamma_2(t_i)}{\Delta t_i} \right|.$$

Par le théorème des accroissements finis pour $k = 1, 2$, il existe $c_{i,k} \in]t_i, t_{i+1}[$ tel que

$$\left| \dot{\gamma}_k(t_i) - \frac{\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)}{\Delta t_i} \right| = |\dot{\gamma}_k(t_i) - \dot{\gamma}_k(c_{i,k})|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour $k = 1, 2$, il suffit de montrer qu'il existe M_k tel que si $N \geq M_k$ alors

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |\dot{\gamma}_k(t_i) - \dot{\gamma}_k(c_{i,k})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\max_{i=0, \dots, N} \Delta t_i \rightarrow 0$ si $N \rightarrow \infty$ et que $\dot{\gamma}_k$ est uniformément continue sur $[a, b]$ (car continue sur $[a, b]$) il existe $M_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N > M_k$

$$\forall i = 0, \dots, N-1, |\dot{\gamma}_k(t_i) - \dot{\gamma}_k(c_{i,k})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Observons que la convergence uniforme ici est cruciale pour que M_k ne dépende ni de t_i et $c_{i,k}$, ni de l'indice i . On a alors que $\forall N \geq M_k$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |\dot{\gamma}_k(t_i) - \dot{\gamma}_k(c_{i,k})| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, on aura

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \leq \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |\dot{\gamma}_k(t_i) - \dot{\gamma}_k(c_{i,k})| \leq \varepsilon$$

en choisissant $N \geq M = \max(M_1, M_2)$.