

Exercice 1. Pour s'échauffer - réflexion sur la notion de continûment différentiable sur un fermé

La définition d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est assez naturelle. On demande que f soit dérivable sur $]a, b[$ et on définit sa fonction dérivée g qui à tout $x \in]a, b[$ associe comme image $g(x)$ que l'on définit comme $g(x) = f'(x)$ où $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est le nombre dérivé. Par abus de langage pratique, on note g comme f' . Pour que $f \in C^1(]a, b[)$, on demande alors que $f' \in C^0]a, b[$.

Si on travaille à présent sur le fermé $[a, b]$, il faut d'abord réfléchir à ce qu'on entend par une fonction dérivable sur le fermé, plus précisément comme définir f' sur le fermé, la notion de dérivée étant de prime abord construite sur les ouverts. La clef est de réfléchir à la notion de dérivabilité dans les bornes a et b . Il y a plusieurs manières de penser la dérivabilité en ces points et ensuite de penser la continuité de la fonction dérivée jusqu'au bornes de l'intervalle.

On donne ici deux définitions de l'espace $C^1([a, b])$:

Définition 1 : on dit que $f \in C^1([a, b])$ si $f \in C^0([a, b]) \cap C^1(]a, b[)$ et si la fonction dérivée $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en a et b .

Définition 2 : on dit que $f \in C^1([a, b])$ si

- f est dérivable sur $[a, b]$ où on définit sa dérivée sur $[a, b]$ comme

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x \in]a, b[\\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x = a, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, & x = b, \end{cases}$$

- $f' \in C^0([a, b])$

Le but de cet exercice est de montrer que ces deux définitions sont équivalentes, c'est-à-dire que f est C^1 sur $[a, b]$ au sens de la définition 1 si et seulement si elle l'est au sens de la définition 2.

Exercice 2. Pour s'échauffer un peu plus - Équivalence injectivité-monotonie

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

En déduire que si $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est une fonction $\mathcal{C}^1([a, b])$ telle que $[c, d] = f([a, b])$ et $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, alors f est bijective de $[a, b]$ dans $[c, d]$ et $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une fonction $\mathcal{C}^1([c, d])$ telle que $(f^{-1})'(y) \neq 0, \forall y \in [c, d]$.

Remarque : On appelle un tel f un difféomorphisme.

Exercice 3. Abscisse curviligne

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple, régulière et $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ . On appelle abscisse curviligne la fonction $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, \text{long}(\Gamma)]$ définie par $\sigma(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds$. Montrer que σ est un difféomorphisme de $[a, b]$ dans $[0, \text{long}(\Gamma)]$, c'est à dire

1. $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, \text{long}(\Gamma)]$ est bijective.
2. $\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b])$.
3. $\dot{\sigma}(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Indication : Montrer que σ est dérivable sur $[a, b]$ et que $\dot{\sigma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$, $\forall t \in [a, b]$.

Exercice 4. Bijection par l'abscisse curviligne

Montrer que l'abscisse curviligne d'une courbe Γ simple, régulière et non fermée par une paramétrisation simple et régulière $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ permet de construire une bijection entre $[0, \text{long}(\Gamma)]$ et Γ .

Indication : Considérer la paramétrisation, dite paramétrisation par la longueur de l'arc, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}$ avec $\sigma^{-1} : [0, \text{long}(\Gamma)] \rightarrow [a, b]$ où σ est l'abscisse curviligne donnée par γ .

Cet exercice montre qu'il existe une paramétrisation "naturelle" d'une courbe en la paramétrisant par la longueur du chemin pour aller d'une extrémité à un point donné. C'est par exemple ainsi que l'on définit le cercle trigonométrique en le paramétrisant par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Remarque : Dans le cas d'une courbe Γ fermée, on devrait considérer uniquement la bijection de $[a, b[\rightarrow \Gamma$ ou $]a, b] \rightarrow \Gamma$.

Exercice 5. Équivalence entre courbes

Dans la série 2-A, on définit l'équivalence entre deux paramétrisations régulières comme: $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{R}^n)$ sont équivalentes s'il existe $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, bijective et $\mathcal{C}^1([a, b])$ telle que $\dot{\phi}(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$ et $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière. Montrer que si $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{R}^n)$ sont deux paramétrisations simples et régulières de Γ alors γ_1 et γ_2 sont équivalentes.

Exercice 6. Indépendance de la paramétrisation

Soit Γ une courbe simple, régulière et soit $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a_1, b_1], \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([a_2, b_2], \mathbb{R}^n)$ deux paramétrisations simples et régulières de Γ . Supposons que $\gamma_1 \sim \gamma_2$, i.e. il existe $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, $\phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a_1, b_1]$, ϕ bijective et $\mathcal{C}^1([a_1, b_1])$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Montrer que $\text{long}(\gamma_1) = \text{long}(\gamma_2)$ où $\text{long}(\gamma_i) = \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\gamma}_i(t)\| dt$, $i \in \{1, 2\}$.

Exercice 7. Accroissements finis généralisés - applications aux courbes

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple, régulière, non fermée, paramétrisée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ simple et régulière. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à Γ au point $\gamma(c)$ soit parallèle à la droite sécante allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$.

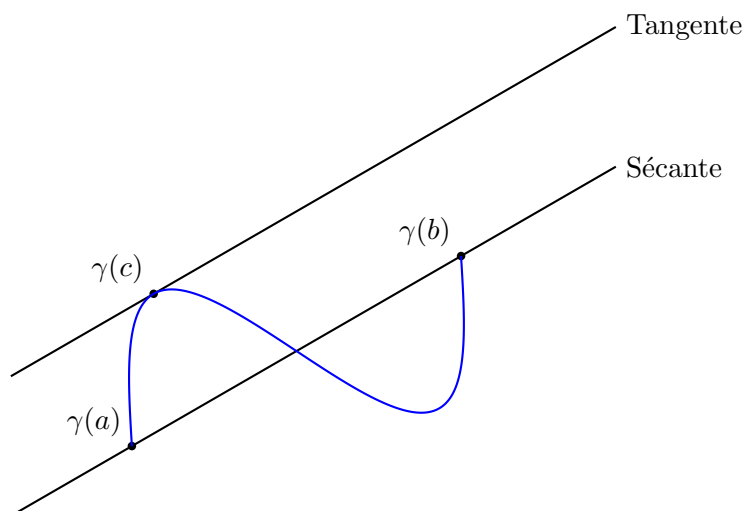


Figure 1: La courbe Γ en bleu.

Exercice 8. Formule pour le calcul de la longueur d'une courbe

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple et régulière paramétrisée par $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ simple et régulière. On a vu que la formule $\text{long}(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds$ pouvait se comprendre comme la limite du processus d'approximation suivant: on partitionne $[a, b]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ construits comme:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b,$$

avec $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ et on considère l'approximation de $\text{long}(\Gamma)$ comme $\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ où $\overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} = \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ est la longueur du segment $\gamma(t_i)$ à $\gamma(t_{i+1})$. On a vu en cours qu'en considérant le développement limité

$$\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) + \Delta t_i \dot{\gamma}(t_i) + \Delta t_i r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})$$

avec

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1}) = 0,$$

on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\|$$

et

$$\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \geq \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| - \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\|.$$

Si on suppose que $\max_{i=0, \dots, N} \Delta t_i \rightarrow 0$ si $N \rightarrow \infty$ on a remarqué que sous l'hypothèse que γ_1 et γ_2 sont C^2 , alors la quantité:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty$$

et de par le théorème des deux gendarmes

$$\sum_{i=1}^{N-1} \overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|\dot{\gamma}(t_i)\| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

On propose ici de montrer que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \|r(\Delta t_i, t_i, t_{i+1})\| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty$$

en supposant uniquement que $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1([a, b])$.