Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 1

Exercice 1.
Soit R un anneau. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont-ils des sous-anneaux ?

1. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\} \subset M_n(R)$.
2. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\} \subset M_n(R)$.
3. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\} \subset M_n(R)$.
4. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
5. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.
6. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$.
7. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 2.
Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $A \to B$.

1. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
3. $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $m, n \in \mathbb{N}$.
5. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}$.
6. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.
7. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Q}$.
8. $A = \mathbb{R}[t]$ et $B = \mathbb{R}$.
9. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}[t]$.

Indication : Pour le point 6, montrez qu'un homomorphisme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les réels positifs vers les réels positifs, et déduisez que f préserve l'ordre usuel sur les réels.

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble B est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau A ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

(a) $A = \mathbb{Z}$ et $B = 9\mathbb{Z}$;

(b) $A = \mathbb{F}_{11}$ et $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$;

(c) $A = \mathbb{Z}[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$;

(d) $A = \mathbb{F}_2[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$;

(e) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;

(f) $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $B = \{[0], [5], [10]\}$;

(g) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$;

(h) $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b\right\}$ et $B = p^n\mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un premier et $n \in \mathbb{N}$;

(i) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;

Exercice 4.
Soit A un anneau commutatif. Montrer les isomorphismes suivants:

(a) $A[t]/(t - a) \cong A$ pour $a \in A$.

(b) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ si I est un idéal bilatère de A.

(c) Montrer que l'application

$$f\colon A[t] \to A[t], \quad p(t) \mapsto p(t+a)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 5.
Soit X, Y des ensembles et A, B des anneaux. On note $\mathrm{Fun}(X, A)$ pour l'anneau des fonctions ensemblistes ou les lois d'anneaux sont prises ponctuellement.

1. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction ensembliste. Montrez que

$$f^*\colon \mathrm{Fun}(Y, A) \to \mathrm{Fun}(X, A)$$

donné par la précomposition par f est un morphisme d'anneau.

2. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneau. Montrez que

$$\varphi_*\colon \mathrm{Fun}(X, A) \to \mathrm{Fun}(X, B)$$

donné par la postcompoistion par φ est un morphisme d'anneau.

3. Soit maintenant X un espace topologique compact et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. On considère $C^0(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de X vers $\mathbb{R}$.

   (a) Montrez que si $x \in X$ alors

$$\{f \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$$

   est un idéal maximal.

   (b) Montrez que tout idéal maximal est de cette forme.

Exercice 6.
Soit K un corps et $M_n(K)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$.

1. Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixés. Soit I un idéal à gauche de $M_n(K)$ contenant la matrice e_{ij}. Montrer que I contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la j-ème colonne", i.e. (b_{rs}) avec $b_{rs} = 0$ si $s \neq j$.

2. Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la j-ème colonne forme un idéal à gauche de $M_n(K)$.

3. Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(K)$ sont $\{0\}$ et $M_n(K)$.

Exercice 7.
Considérons $\mathbb{Q}[x, y]$ et soient $I = (xy)$ et $J = (y^2)$. Montrer que chacune des inclusions dans le diagramme suivant sont strictes.

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dr, hook] & \\
I \cdot J \arrow[r, hook] & I \cap J \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & I + J \\
 & & J \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$