

Exercice 1. Pour s'échauffer - Paramétrisation des bords d'un triangles

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle du plan de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Donner une paramétrisation régulière par morceau de $\Gamma = \partial T$.

Correction.

On peut définir $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\gamma(t) = \begin{cases} t(1, 0), & t \in [0, 1], \\ (-t+2)(0, 1) + (t-1)(1, 0), & t \in [1, 2], \\ (3-t)(0, 1), & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Exercice 2. Vecteurs tangents et représentations des courbes

Pour les courbes paramétrées ci-dessous, esquisser la courbe, calculer le vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$ et déterminer l'équation de la tangente à la trajectoire Γ au point M donné. Représenter la situation dans un repère Oxy

1. $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
2. $\gamma(t) = (3 \cos(2t), 2 \sin(2t))$, $t \in [0, \pi]$, $M = (\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ *Indication* : $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$, $t \in [-1, 1]$, $M = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Correction.

On rappelle que l'équation de la tangente à la trajectoire Γ au point $M = \gamma(t_0)$ est donnée par

$$t_\Gamma : y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0))$$

avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et le nombre $\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ représente la pente de la tangente.

1. On observe que $M = \gamma(\frac{1}{2})$. On calcule le vecteur dérivée :

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (1, 2t).$$

Donc la pente de la tangente en M est $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1$ et l'équation est donnée par

$$t_\Gamma : y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_\Gamma : y = x - \frac{1}{4}.$$

La courbe paramétrée décrite ici est la parabole, graphe de la fonction $f(x) = x^2$.

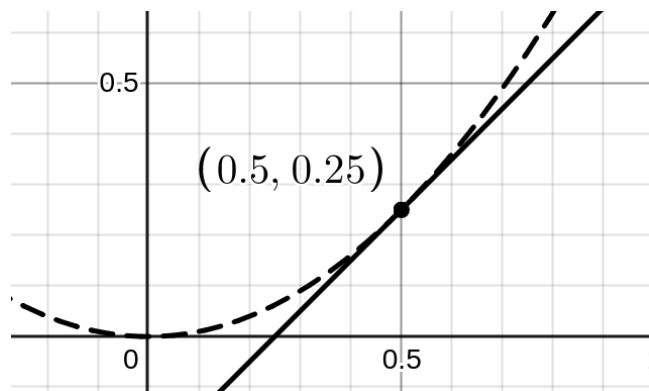


Figure 1: $\gamma(t) = (t, t^2)$.

2. On observe que $M = \gamma(\frac{\pi}{6})$. On calcule le vecteur dérivé :

$$\dot{\gamma}(t) = (-6 \sin(2t), 4 \cos(2t)).$$

Donc la pente de la tangente en M est $\frac{2}{-3\sqrt{3}}$ et l'équation de la tangente est

$$t_{\Gamma} : y - \sqrt{3} = \frac{2}{-3\sqrt{3}} \left(x - \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow t_{\Gamma} : y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}.$$

La courbe paramétrée décrite ici est une ellipse de demi-axe horizontal 3 et de demi-axe vertical 2.

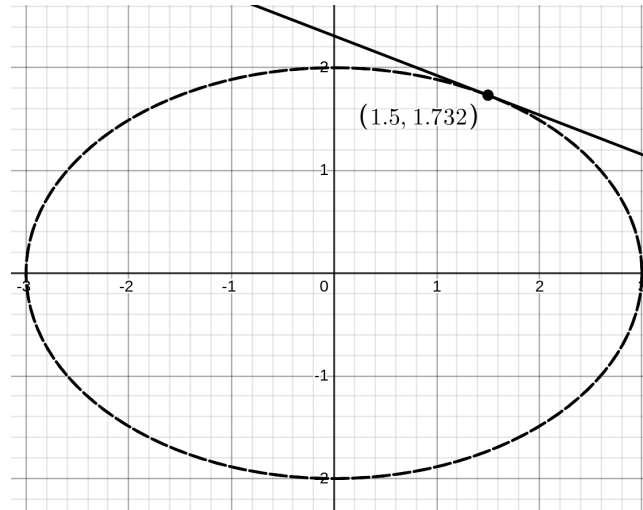


Figure 2: $\gamma(t) = (3 \cos(2t), 2 \sin(2t))$

3. On observe que $M = \gamma(-\frac{1}{2})$. On calcule le vecteur dérivé :

$$\dot{\gamma}(t) = \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1 \right)$$

et la pente de la tangente en M est donnée par $\sqrt{3}$. L'équation de la tangente est alors donné par

$$t_{\Gamma} : y + \frac{1}{2} = \sqrt{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow t_{\Gamma} : y = \sqrt{3}x - 2.$$

La courbe paramétrée décrite ici est le demi-cercle de droite, de rayon 1, centré en l'origine.

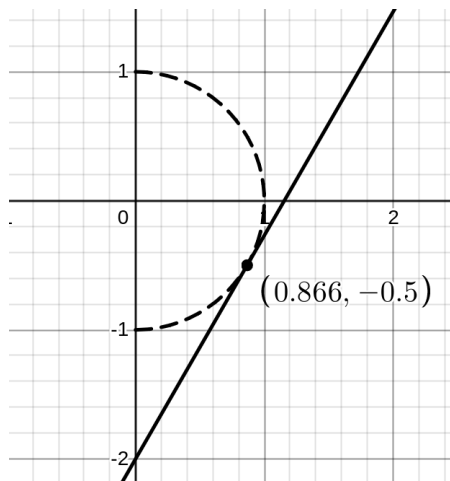


Figure 3: $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$

Exercice 3. Longueur de courbes

Calculer la longueur des courbes paramétrées ci-dessous.

1. $\gamma(t) = (t, (\sqrt{t})^3), t \in [0, 1]$

2. $\gamma(t) = (2 \cos(t) - \cos(2t), -2 \sin(t) - \sin(2t)), t \in [-\pi, \pi]$

Indication : $\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos(t)}{2}$

3. $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, \pi]$

Indication : $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos(t)}{2}$

4. $\gamma(t) = (t, \ln \cos t), t \in [-\pi/6, \pi/6]$.

Correction.

Pour Γ , la trajectoire d'une courbe paramétrée $\gamma(t), t \in [a, b]$, on rappelle la formule

$$\text{long}(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

1. On calcule $\dot{\gamma}(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$ et donc

$$\text{long}(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \left[\frac{8}{27} \left(\sqrt{1 + \frac{9}{4}t} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{8}{27} \left(\left(\sqrt{\frac{13}{4}} \right)^3 - 1 \right).$$

2. On calcule les dérivées des coordonnées $x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t)$ et $y(t) = -2 \sin(t) - \sin(2t)$:

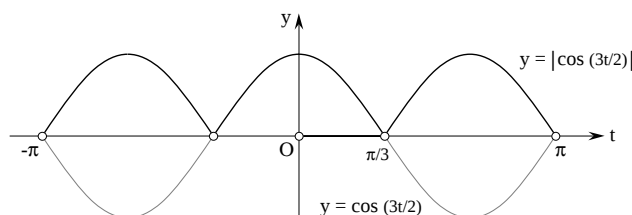
$$\dot{x}(t) = -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) = -2 [\sin(t) - \sin(2t)],$$

On a alors $\dot{y}(t) = -2 \cos(t) - 2 \cos(2t) = -2 [\cos(t) + \cos(2t)].$

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) &= 4 [\sin(t) - \sin(2t)]^2 + 4 [\cos(t) + \cos(2t)]^2 \\ &= 4 [\sin^2(t) - 2 \sin(t) \sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) + 2 \cos(t) \cos(2t) + \cos^2(2t)] \\ &= 4 [2 + 2 \cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)] \\ &= 8 [1 + \cos(3t)] = 16 \frac{1 + \cos(3t)}{2} = 16 \cos^2\left(\frac{3t}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = 4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right|.$

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, $\cos\frac{3t}{2}$ n'est pas de signe constant :



Par périodicité et symétrie, on en déduit que $\text{long}(\Gamma) = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right| dt = 4 \times 6 \int_0^{\pi/3} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) dt.$

D'où

$$\text{long}(\Gamma) = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right| dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) dt = 24 \left[\frac{2}{3} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 16.$$

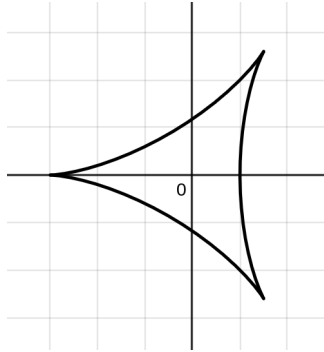


Figure 4: La courbe $\gamma(t) = (2 \cos(t) - \cos(2t), -2 \sin(t) - \sin(2t))$, $t \in [-\pi, \pi]$

3. On calcule les dérivées des fonctions coordonnées :

$$\dot{x}(t) = 1 - \cos(t), \dot{y}(t) = \sin(t)$$

d'où

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) = 2 - 2 \cos(t)$$

et donc

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(t)} = 2 \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Entre 0 et π , $\sin(\frac{t}{2})$ est toujours positif. Donc

$$\text{long}(\Gamma) = \int_0^{\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = 2 \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4 \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\pi} = 4.$$

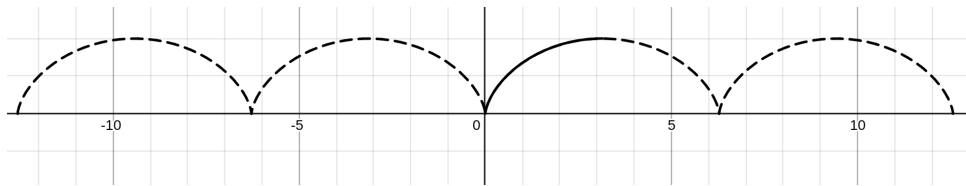


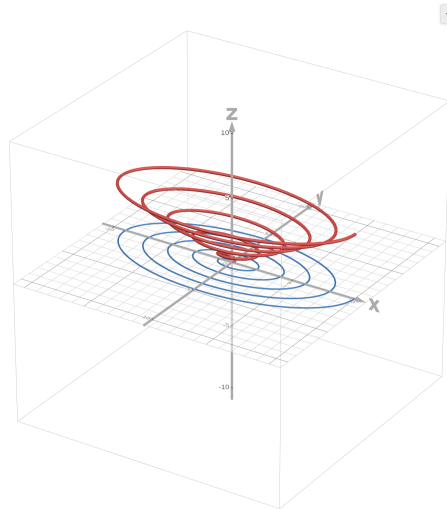
Figure 5: Trait tillé : $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ entre -4π et 4π . Trait plein entre 0 et π . Cette courbe est la cycloïde et est la trajectoire qui suit un point sur la roue d'un vélo quand celui-ci avance.

4. On a $\dot{\gamma}(t) = (1, -\tan t)$, d'où

$$\begin{aligned} \text{long}(\Gamma) &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{1 + \tan^2 t} dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dt}{\cos t} \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\cos t}{1 - \sin t} + \frac{\cos t}{1 + \sin t} \right) dt = [-\ln(1 - \sin t) + \ln(1 + \sin t)]_0^{\pi/6} \\ &= \left[\ln\left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}\right) \right]_0^{\pi/6} = \ln 3 \end{aligned}$$

Exercice 4. Paramétrisation d'une courbe

Soient une courbe (en rouge) ainsi que sa projection sur le plan $x-y$ (en bleu) illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- ☐ $(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), 2t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

Correction.

Sur le graphique, le point de la courbe correspondant à $t = 5$ est $(10, 0, 5)$. Seule la courbe $(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ vérifie cette propriété.

Exercice 5.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (1 - t^2, t^2 - t^3)$.

1. Donner l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point $\gamma(0)$.
2. Donner l'équation cartésienne de la droite tangente à Γ passant par le point $P = (4, -8) \notin \Gamma$.

Correction.

L'équation cartésienne de la tangente au point $\gamma(t_0)$ est donnée par

$$t : y - \gamma_2(t_0) = m(x - \gamma_1(t_0)), \text{ avec } m = \frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)}.$$

1. On calcule $\dot{\gamma}_1(t) = -2t$ et $\dot{\gamma}_2(t) = 2t - 3t^2$. On observe que $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$ (la courbe n'est pas régulière), dès lors la pente de la tangente se calcule comme

$$m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 3t^2}{-2t} = -1,$$

et l'équation de la tangente est donnée par

$$\begin{aligned} t : y - \gamma_2(0) &= -1(x - \gamma_1(0)) \\ \Leftrightarrow t : y - 0 &= -1(x - 1) \\ \Leftrightarrow t : y &= -x + 1. \end{aligned}$$

2. Le problème ici revient à chercher le point de tangence. Soit $\gamma(t_0)$ ce point, alors l'équation de la tangente est donnée par

$$\begin{aligned} t : y - \gamma_2(t_0) &= m(x - \gamma_1(t_0)) \\ \Leftrightarrow t : y - t_0^2 + t_0^3 &= \frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)}(x - 1 + t_0^2). \end{aligned}$$

Or, pour $t_0 \neq 0$ (si $t_0 = 0$, la tangente est $t : y = -x + 1$ et $P \notin t$),

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t_0)}{\dot{\gamma}_1(t_0)} = \frac{2t_0 - 3t_0^2}{-2t_0}.$$

Résolvons l'équation avec cette donnée

$$\begin{aligned} t : y - t_0^2 + t_0^3 &= \frac{2t_0 - 3t_0^2}{-2t_0}(x - 1 + t_0^2) \text{ et } P \in t \\ \Leftrightarrow -8 - t_0^2 + t_0^3 &= \frac{2t_0 - 3t_0^2}{-2t_0}(4 - 1 + t_0^2) \\ \Leftrightarrow t_0(t_0 + 1)(t_0^2 - t_0 + 10) &= 0 \\ \Leftrightarrow t_0 &= -1. \end{aligned}$$

On a alors $\gamma(-1) = (0, 2)$ et $m = -5/2$, d'où

$$t : y - 2 = -\frac{5}{2}x \Leftrightarrow t : y = -\frac{5}{2}x + 2.$$

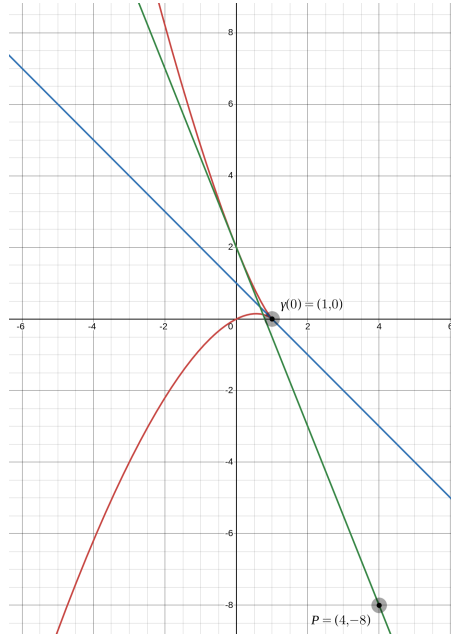


Figure 6: En rouge, la courbe $\Gamma = \{\gamma(t) = (1 - t^2, t^2 - t^3), -3 \leq t \leq 3\}$. En bleu, la droite $t : y = -x + 1$ et en vert, la droite $t : y = -5x/2 + 2$.

Exercice 6. Pour aller plus loin - Mouvement cyclotron

On considère une particule de charge $q > 0$ et de masse $m > 0$ soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme orienté selon l'axe Oz et d'amplitude constante $B > 0$. On introduit la pulsation cyclotron $\omega_c = qB/m$ et un rayon ρ_c . Les lois de l'électromagnétisme et de la mécanique classiques nous donnent le mouvement de la particule par une courbe paramétrée dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$:

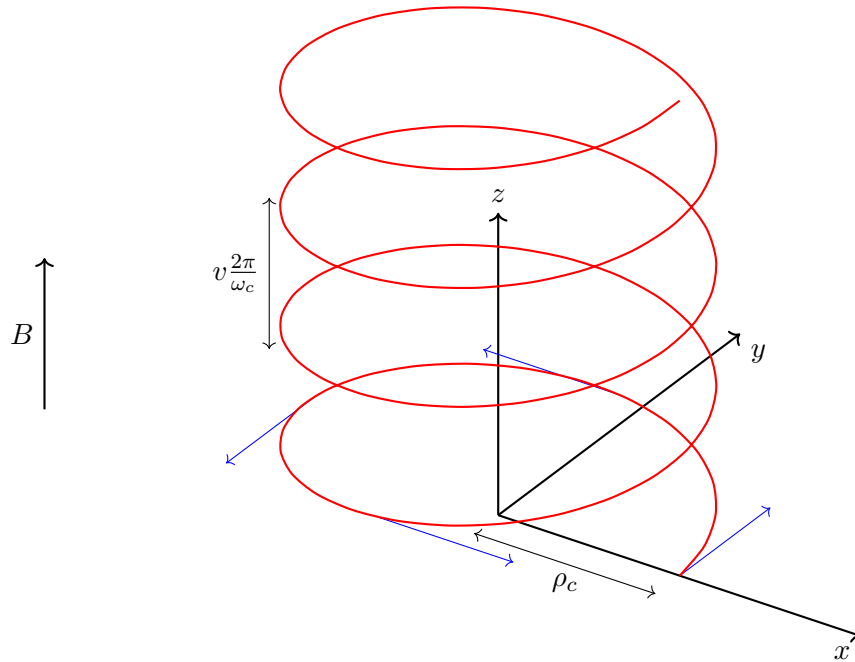
$$\gamma(t) = (\rho_c \cos(\omega_c t), \rho_c \sin(\omega_c t), vt).$$

Dans la formule ci dessus, v représente la vitesse constante de la particule selon l'axe Oz .

1. Esquisser la courbe dans $\mathbb{R}^3$, pour $t \in [0, 4]$, pour les paramètres suivants $\omega_c = 2\pi$, $\rho_c = 1$, $v = 1$.
2. Calculer le vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$. Physiquement, ce vecteur représente la vitesse de la particule.
3. Ajouter sur la courbe le vecteur vitesse aux temps $t = 0, 1/4, 1/2, 1$.
4. Calculer la distance parcourue par la particule en fonction du temps t .

Correction.

1. La courbe suivante en rouge représente la trajectoire. Les constantes indiquées sur le dessin sont égales à 1 dans notre cas.



2. $\dot{\gamma}(t) = (-\omega_c \rho_c \sin(\omega t), \omega_c \rho_c \cos(\omega t), v)$.
3. Le vecteur vitesse est représenté en bleu sur le dessin.
4.
$$L(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t')\| dt' = \int_0^t \sqrt{\rho_c^2 \omega_c^2 + v^2} dt' = t \sqrt{\rho_c^2 \omega_c^2 + v^2}.$$

Bonus Interprétation physique. Le mouvement que nous venons d'étudier est le mouvement cyclotron. On dit qu'une particule soumise à un champ magnétique intense est confinée. En effet, les mouvements dans les directions x et y sont limités, la particule ne se déplace librement que selon l'axe Oz . Ce principe est utilisé dans les réacteurs de fusion thermonucléaire (par exemple les tokamaks, comme le TCV de l'EPFL). Un champ magnétique intense permet de confiner les particules dans l'enceinte du réacteur.