

Exercice 1. Exercices de révisions - ouvert/fermé/borné

Pour les ensembles ci-dessous, déterminer s'ils sont ouverts/fermés/bornés.

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x^2 - 1\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t), t \in [0, 4\pi]\}$
4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y < \sqrt{x}\}$
5. D le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y) = \log(4 - (x + y)^2)$ est bien définie.

Correction.

1. L'ensemble est la région du plan comprise entre les deux droites $y = x - 1$ et $y = 1 - x$. Il est fermé car il contient son bord (inégalités larges) et non borné.

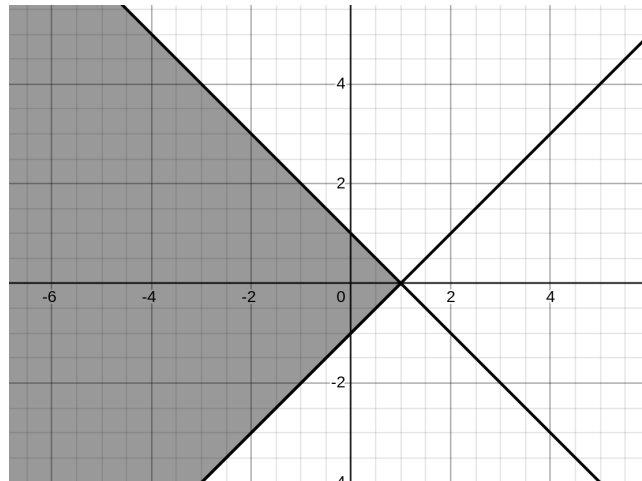


Figure 1: La région grisée représente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$.

2. L'ensemble est la région comprise dans les deux paraboles d'équation $y = x^2 + 1$ et $y = -x^2 - 1$. Il est ouvert car ne contient pas son bord (inégalités strictes). Il est non borné.

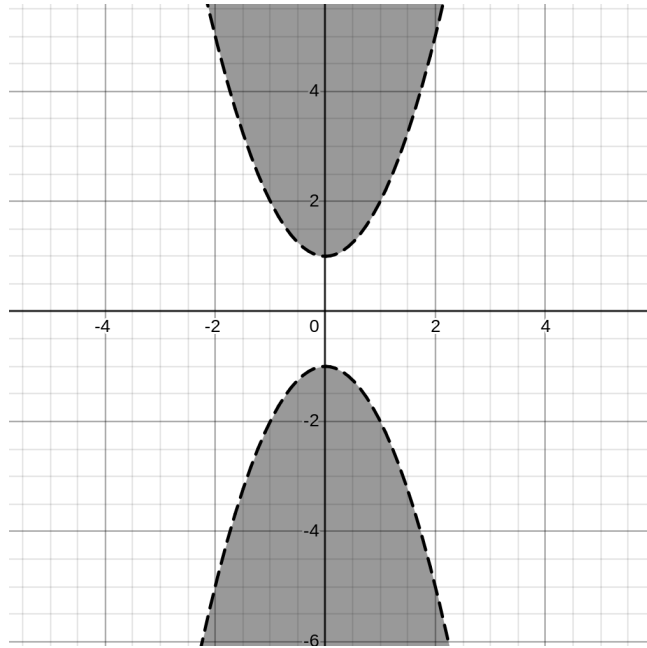


Figure 2: La région grisée représente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > x^2 + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < -x^2 - 1\}$.

3. L'ensemble est fermé car c'est une courbe (dimension 1) et elle contient ses deux extrémités. L'ensemble est borné.

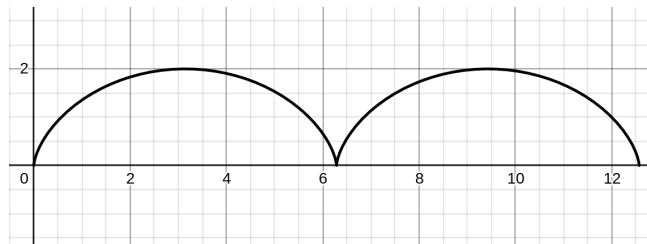


Figure 3: L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t), t \in [0, 4\pi]\}$ est une cycloïde, c'est-à-dire la trajectoire suivie par un point sur une roue de vélo.

4. L'ensemble est la portion du plan comprise entre la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et les droites $y = 0$ et $x = 1$. Il n'est ni ouvert ni fermé, car ne contient pas tout son bord. Il est borné.

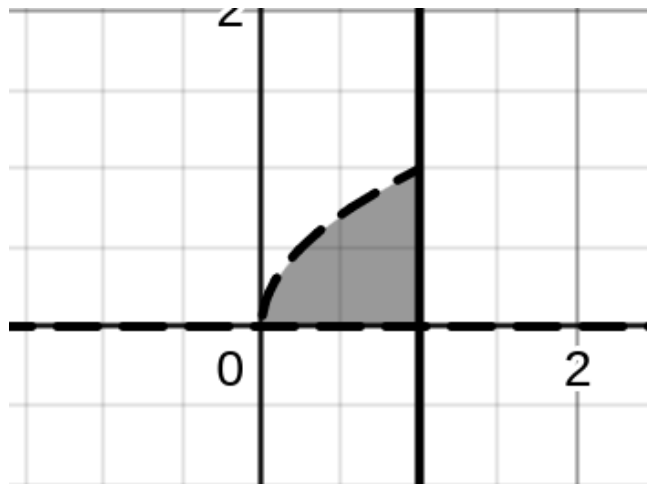


Figure 4: La région grisée est l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y < \sqrt{x}\}$.

5. D est ouvert et non borné. En effet, l'expression est bien définie si $4 - (x + y)^2 > 0$ ce qui est

équivalent à

$$-2 < x + y < 2.$$

Les équations $-2 = x + y \Leftrightarrow y = -2 - x$ et $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ définissent deux droites parallèles et D est l'ensemble des points entre ces deux droites. L'ensemble est donc ouvert et non borné.

Exercice 2. Relation d'équivalence sur les courbes

Soit $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^n)$, avec I_1, I_2 deux intervalles fermés, deux paramétrisations régulières d'une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. On dit que γ_1 est équivalente à γ_2 , noté $\gamma_1 \sim \gamma_2$, s'il existe $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$, bijective, telle que $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_1, I_2)$, $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in I_1$ et

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$

Remarque et rappel:

- Si $I = [a, b]$, on dit que φ est dérivable sur $[a, b]$ si φ est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b . On définit φ' sur $[a, b]$ par

$$\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \quad \forall t \in]a, b[,$$

$$\varphi'(a) = \varphi'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h},$$

$$\varphi'(b) = \varphi'_g(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(b+h) - \varphi(b)}{h}.$$

- Si $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ est bijective $\mathcal{C}^1(I_1, I_2)$ avec $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in I_1$, alors $\varphi^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ est $\mathcal{C}^1(I_2, I_1)$. On dit alors que φ est un difféomorphisme.

Montrer que $\sim$ décrit une relation d'équivalence, c'est à dire

1. $\forall \gamma, \gamma \sim \gamma$. [Réflexivité]
2. $\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$. [Symétrie]
3. $\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1 \sim \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$. [Transitivité]

Correction.

Pour chaque cas, il faut expliciter la fonction φ .

1. $\forall \gamma, \gamma = \gamma \circ \text{id}$, où $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$.
2. Si φ est telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$, on a aussi $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$.
3. Soit φ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ et $\tilde{\varphi}$ telle que $\gamma_2 = \gamma_3 \circ \tilde{\varphi}$, alors $\gamma_1 = \gamma_3 \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi$ avec $\tilde{\varphi} \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(I_1, I_3)$ avec $(\tilde{\varphi} \circ \varphi)'(t) = \tilde{\varphi}'(\varphi(t))\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in I_1$.

Exercice 3. Topologie de $\mathbb{R}^n$

1. Montrer qu'une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, avec U_{α} des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in U$ il existe α tel que $x \in U_{\alpha}$. U_{α} étant ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset U_{\alpha} \subset U$. Donc U est ouvert.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $U = \bigcap_i^m U_i$, avec U_i des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in U$ alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $x \in U_i$, et $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ il existe $\delta_i > 0$ telle que $B(x, \delta_i) \subset U_i$. Soit $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $B(x, \delta) \subset B(x, \delta_i) \subset U_i$ et donc $B(x, \delta) \subset \bigcap_i^m U_i = U$.

Exercice 4. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé. Montrer que si $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ converge, alors sa limite appartient à E .

Correction.

Soit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ et supposons par l'absurde que $x \notin E$. D'une part, comme E est fermé, $\mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert, et si $x \notin E$, alors $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. D'autre part, puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K \Rightarrow \|x - x_k\| < \delta$. Autrement dit, pour tout $k \geq K$, $x_k \in B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$, ce qui est en contradiction avec le fait que $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$.

Exercice 5. Inégalité de Young et de Hölder et révision sur l'équivalence de normes

1. Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

où $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Indication : utiliser le fait que la fonction $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est concave et appliquer $\ln$ à la relation d'inégalité.

2. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

où $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ici, par convention, $[1, +\infty] := [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $\frac{1}{+\infty} := 0$.

Indication : poser $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ et utiliser l'inégalité de Young, après avoir écrit $|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\lambda |x_i| \right) \left(\frac{1}{\lambda} |y_i| \right)$.

3. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty[$ mais pas pour $p \in]0, 1[$.

Indication : partir de $\|x + y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq n^{1/q} \|x\|_p, \\ \|x\|_p &\leq n^{1/p} \|x\|_{\infty}, \\ \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_1. \end{aligned}$$

En déduire que toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty]$, sont équivalentes.

Correction.

1. Inégalité de Young

Soit $1 < p < +\infty$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On doit montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
D'abord, si $a = 0$ ou $b = 0$ (donc aussi si $a = b = 0$), l'inégalité est triviale. Supposons donc que $a > 0$ et $b > 0$ et soit $g(s) = -\ln(s)$. On a pour tout $s \in]0, +\infty[$ que $g''(s) = \frac{1}{s^2} > 0$. Ainsi, la fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a donc pour $1 < p < +\infty$ que

$$g\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q)$$

et de suite que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, ceci n'est possible que si

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. Inégalité de Hölder

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien. On doit montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

(a) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right) \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

(b) Soit maintenant $p \in]1, +\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire $q = \frac{p}{p-1}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \cdot \frac{1}{\lambda} |y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \lambda^p |x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} |y_i|^q = \frac{1}{p} \lambda^p \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q. \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ on obtient, puisque $p - \frac{p}{q} = q - \frac{q}{p} = 1$,

$$\lambda^p \|x\|_p^p = \|x\|_p^{-p/q} \|y\|_q \|x\|_p^p = \|x\|_p \|y\|_q,$$

et

$$\frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q^{-q/p} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Ainsi,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

3. $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$

On va montrer que pour $p \geq 1$ l'inégalité triangulaire est satisfaite mais pas pour $p < 1$. Les autres propriétés d'une norme sont satisfaites pour tous les p .

(a) Soit $p \geq 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder $\langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q$ avec

$$\begin{aligned} a &= (|x_1|, \dots, |x_n|) \\ b &= (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} &= \langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Rappelant que, puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (p-1)$ et $(p-1)q = p$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

On obtient de la même manière que

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$

et on a donc

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}.$$

De cette inégalité on obtient l'inégalité triangulaire recherchée, en divisant à gauche et à droite par $\|x + y\|_p^{p-1}$ si $\|x + y\|_p \neq 0$. Si $\|x + y\|_p = 0$, l'inégalité triangulaire est trivialement satisfaite. Les autres propriétés d'une norme sont immédiates.

(b) Soit $p < 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, \dots, 0, 1)$. On a $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, mais $\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$, ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas toujours satisfaite, et $\|\cdot\|_p$ n'est donc pas une norme.

4. Inégalités

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, et posons $|x| := (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Soit $p > 1$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,

(a) En posant $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ on obtient

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \langle |x|, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q = n^{1/q} \|x\|_p$$

(b) On a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

(c) On a

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Montrons maintenant que les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes équivalentes. En effet, soient $p, r \in [1, +\infty]$ et soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_r \leq n^{1/r} \|x\|_\infty \leq n^{1/r} \|x\|_1 \leq n^{1/r} n^{1/q} \|x\|_p \leq n^{1/r+1/q} \|x\|_p,$$

et de la même manière on trouve que

$$\|x\|_p \leq n^{1/p+1/s} \|x\|_r,$$

où s est tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.