

Exercice 1. Pour s'échauffer - Paramétrisation des bords d'un triangles

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle du plan de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Donner une paramétrisation régulière par morceau de $\Gamma = \partial T$.

Exercice 2. Vecteurs tangents et représentations des courbes

Pour les courbes paramétrées ci-dessous, esquisser la courbe, calculer le vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$ et déterminer l'équation de la tangente à la trajectoire Γ au point M donné. Représenter la situation dans un repère Oxy

1. $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [-1, 1], M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
2. $\gamma(t) = (3 \cos(2t), 2 \sin(2t)), t \in [0, \pi], M = (\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ *Indication : $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$*
3. $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2}, t), t \in [-1, 1], M = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

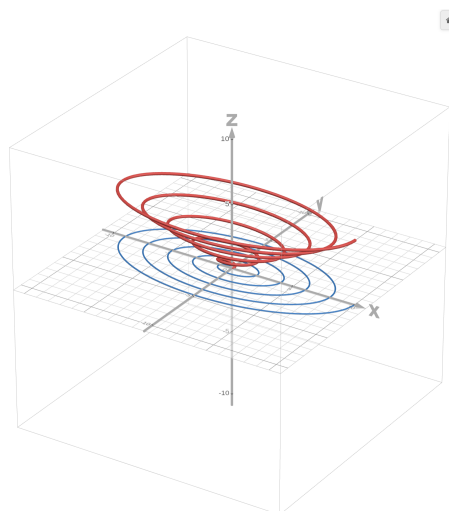
Exercice 3. Longueur de courbes

Calculer la longueur des courbes paramétrées ci-dessous.

1. $\gamma(t) = (t, (\sqrt{t})^3), t \in [0, 1]$
2. $\gamma(t) = (2 \cos(t) - \cos(2t), -2 \sin(t) - \sin(2t)), t \in [-\pi, \pi]$
Indication : $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \cos^2(\frac{t}{2}) = \frac{1+\cos(t)}{2}$
3. $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, \pi]$
Indication : $\sin^2(\frac{t}{2}) = \frac{1-\cos(t)}{2}$
4. $\gamma(t) = (t, \ln \cos t), t \in [-\pi/6, \pi/6]$.

Exercice 4. Paramétrisation d'une courbe

Soient une courbe (en rouge) ainsi que sa projection sur le plan $x-y$ (en bleu) illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- ☐ $(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), 2t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

Exercice 5.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (1 - t^2, t^2 - t^3)$.

1. Donner l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point $\gamma(0)$.
2. Donner l'équation cartésienne de la droite tangente à Γ passant par le point $P = (4, -8) \notin \Gamma$.

Exercice 6. Pour aller plus loin - Mouvement cyclotron

On considère une particule de charge $q > 0$ et de masse $m > 0$ soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme orienté selon l'axe Oz et d'amplitude constante $B > 0$. On introduit la pulsation cyclotron $\omega_c = qB/m$ et un rayon ρ_c . Les lois de l'électromagnétisme et de la mécanique classiques nous donnent le mouvement de la particule par une courbe paramétrée dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = (\rho_c \cos(\omega_c t), \rho_c \sin(\omega_c t), vt).$$

Dans la formule ci dessus, v représente la vitesse constante de la particule selon l'axe Oz .

1. Esquisser la courbe dans $\mathbb{R}^3$, pour $t \in [0, 4]$, pour les paramètres suivants $\omega_c = 2\pi$, $\rho_c = 1$, $v = 1$.
2. Calculer le vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$. Physiquement, ce vecteur représente la vitesse de la particule.
3. Ajouter sur la courbe le vecteur vitesse aux temps $t = 0, 1/4, 1/2, 1$.
4. Calculer la distance parcourue par la particule en fonction du temps t .

Réponses

Exercice 2.

1. $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$, $t_{\Gamma} : y = x - \frac{1}{4}$.
2. $\dot{\gamma}(t) = (-6 \sin(2t), 4 \cos(2t))$, $t_{\Gamma} : y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$.
3. $\dot{\gamma}(t) = (-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1)$, $t_{\Gamma} : y = \sqrt{3}x - 2$.

Exercice 3.

1. $\text{long}(\Gamma) = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - 1 \right)$.
2. $\text{long}(\Gamma) = 16$.
3. $\text{long}(\Gamma) = 4$.
4. $\text{long}(\Gamma) = \ln 3$.

Exercice 5.

1. $t : y = -x + 1$.
2. $t : y - \frac{5}{2}x + 2$.