

Exercice 1. Exercices de révisions - ouvert/fermé/borné

Pour les ensembles ci-dessous, déterminer s'ils sont ouverts/fermés/bornés.

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x^2 - 1\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t), t \in [0, 4\pi]\}$
4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y < \sqrt{x}\}$
5. D le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y) = \log(4 - (x + y)^2)$ est bien définie.

Exercice 2. Relation d'équivalence sur les courbes

Soit $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^n)$, avec I_1, I_2 deux intervalles fermés, deux paramétrisations régulières d'une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. On dit que γ_1 est équivalente à γ_2 , noté $\gamma_1 \sim \gamma_2$, s'il existe $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$, bijective, telle que $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_1, I_2)$, $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in I_1$ et

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$

Remarque et rappel:

- Si $I = [a, b]$, on dit que φ est dérivable sur $[a, b]$ si φ est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b . On définit φ' sur $[a, b]$ par

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \quad \forall t \in]a, b[, \\ \varphi'(a) &= \varphi'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}, \\ \varphi'(b) &= \varphi'_g(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(b+h) - \varphi(b)}{h}.\end{aligned}$$

- Si $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ est bijective $\mathcal{C}^1(I_1, I_2)$ avec $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in I_1$, alors $\varphi^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ est $\mathcal{C}^1(I_2, I_1)$. On dit alors que φ est un difféomorphisme.

Montrer que $\sim$ décrit une relation d'équivalence, c'est à dire

1. $\forall \gamma, \gamma \sim \gamma$. [Réflexivité]
2. $\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$. [Symétrie]
3. $\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ et } \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$. [Transitivité]

Exercice 3. Topologie de $\mathbb{R}^n$

1. Montrer qu'une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé. Montrer que si $(x_k)_{k=0}^\infty \subset E$ converge, alors sa limite appartient à E .

Exercice 5. Inégalité de Young et de Hölder et révision sur l'équivalence de normes

1. Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

où $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Indication : utiliser le fait que la fonction $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est concave et appliquer $\ln$ à la relation d'inégalité.

2. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

où $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ici, par convention, $[1, +\infty] := [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $\frac{1}{+\infty} := 0$.

Indication : poser $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ et utiliser l'inégalité de Young, après avoir écrit $|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\lambda |x_i| \right) \left(\frac{1}{\lambda} |y_i| \right)$.

3. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty[$ mais pas pour $p \in]0, 1[$.

Indication : partir de $\|x + y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|x\|_1 \leq n^{1/q} \|x\|_p,$$

$$\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

En déduire que toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty]$, sont équivalentes.

Réponses

Exercice 1.

1. Fermé, non borné.
2. Ouvert, non borné.
3. Fermé, borné.
4. Ni ouvert, ni fermé, borné.
5. Ouvert, non borné.