

1 Questionnaire à choix multiples (12 points)

1a = b ; 1b = c ; 1c = c ; 1d = b ; 1e = d ; 1f = d

2 Jeu du pendule (18 points)

Partie A)

a) (3 points)

Les forces agissant sur la masse m_1 sont la tension du fil $\vec{T}$ et le poids.

La tension $\vec{T}$ ne travaille pas parce que toujours perpendiculaire au vecteur déplacement.

Le poids est une force conservative.

Donc, l'énergie mécanique E est conservée

Application de la conservation de l'énergie mécanique:

$$-mgl \cos \theta_0 = -mgl \cos \alpha + 1/2mv_1^2$$

$$v_1^2 = 2gl(\cos \alpha - \cos \theta_0)$$

b) (3 points)

On néglige l'effet de la pesanteur pendant le choc.

- Une seule force externe: la tension du fil $\vec{T}$, dirigée le long du fil. Donc, la quantité de mouvement perpendiculaire au fil est conservée.

Réponse alternative : La tension $\vec{T}$ du fil est une force centrale en O . Donc, le moment cinétique total par rapport à O L_O est conservé.

- L'énergie cinétique (ou mécanique) est conservée car il s'agit d'un choc élastique.

D'après le formulaire : $v_2' = 4/3v_1 = 4/3\sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \theta_0)}$

c) (3 points)

La masse m_2 suit un mouvement balistique après le choc. En indiquant avec $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires, respectivement le long de x et z , la deuxième loi de Newton s'écrit:

$$\ddot{z} = -g$$

$$\ddot{x} = 0$$

En intégrant par rapport au temps t :

$$\dot{z}(t) = -gt + v_2' \sin \alpha$$

$$\dot{x} = v_2' \cos \alpha$$

Soit t_A l'instant où la masse m_2 tombe dans le godet avec $z(t_A) = 0$. La trajectoire de m_2 est une parabole symétrique par rapport à $d/2$ et donc $\dot{z}(t_A) = -v_2' \sin \alpha$. On trouve que:

$$-gt_A + v_2' \sin \alpha = -v_2' \sin \alpha$$

et donc on en déduit que $t_A = \frac{2v_2' \sin \alpha}{g}$

Réponse alternative : Le godet se trouve à une distance $x(t_A) = v_2' \cos \alpha = d$, donc $t_A = \frac{d}{v_2' \cos \alpha}$

On trouve alors que $x(t_A) = d = v_2' \cos \alpha \times \frac{2v_2' \sin \alpha}{g}$

Réponse alternative : En remplaçant $t_A = \frac{d}{v'_2 \cos \alpha}$ dans l'équation horaire selon z on trouve:
 $z(t_A) = 0 = -1/2g \frac{d^2}{(v'_2 \cos \alpha)^2} + d \tan \alpha$ et on retrouve $d = v'_2 \cos \alpha \times \frac{2v'_2 \sin \alpha}{g}$
 En remplaçant le résultat trouvé au point b) pour v'_2 on obtient : $d = \frac{64}{9}l \sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \theta_0)$
 et donc

$$\cos \theta_0 = \cos \alpha - \frac{9d}{64l \sin \alpha \cos \alpha}$$

Partie B)

d) (3 points)

Les forces externes agissantes sur le système sont:

- la force de liaison en O : cette force ne travaille pas parce que O est fixe
- le poids en G : il s'agit d'une force conservative.

Donc, l'énergie mécanique est conservée

L'énergie cinétique calculée par rapport à O est donnée par $K = \frac{1}{2}I_{Oz}\omega_1^2$

En appliquant le théorème de Steiner on trouve que: $I_{Oz} = I_{Gz} + m(l/2)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$

Donc: $K = \frac{1}{6}ml^2\omega_1^2$

Réponse alternative : L'énergie cinétique calculée par rapport à G est donnée par $K = \frac{1}{2}I_{Gz}\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$ avec $v_G = \omega_1 \frac{l}{2}$. Ainsi, $K = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_1^2\frac{l^2}{4} = \frac{1}{6}ml^2\omega_1^2$

D'autre part, en prenant comme zéro pour l'énergie potentielle la position $\theta_1 = \pi/2$, on a $V(\theta) = -mg \frac{l}{2} \cos(\theta)$. Ainsi, la conservation de l'énergie mécanique entre l'angle initial et final s'écrit:
 $-mg \frac{l}{2} \cos \theta_1 = -mg \frac{l}{2} \cos \alpha + \frac{1}{6}ml^2\omega_1^2$

On trouve: $(l\omega_1)^2 = 3gl(\cos \alpha - \cos \theta_1)$ c'est à dire $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}(\cos \alpha - \cos \theta_1)}$

Remarque: Si on considère une masse additionnelle m_1 attachée à la tige on a $I_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$

Donc $K = \frac{2}{3}ml^2\omega_1^2$

Le centre de masse ($M = 2m$) se trouve à une distance $r_G = \frac{ml/2 + ml}{2m} = \frac{3}{4}l$ de O

Conservation de l'énergie mécanique: $-2mg\frac{3}{4}l \cos \theta_1 = -2mg\frac{3}{4}l \cos \alpha + \frac{2}{3}ml^2\omega_1^2$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9g}{4l}(\cos \alpha - \cos \theta_1)}$$

e) (4 points)

Pendant le choc, la seule force externe agissante sur le système est la force de liaison en O . Le moment de cette force M_O par rapport à O est $M_O = 0$, donc le moment cinétique totale par rapport à O est conservé ($L_O = \text{constante}$).

Choc élastique, donc énergie cinétique (ou mécanique) conservée

La formulation de la conservation de L_O donne:

$$I_1\omega_1 = I_1\omega'_1 + m_2v'_2l \quad \text{avec } I_1 = I_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2$$

La formule précédente peut aussi être écrite comme: $I_1\omega_1 = I_1\omega'_1 + I_2\omega'_2$ avec $I_2 = \frac{1}{2}ml^2$

Étant donné que le choc est élastique, l'énergie cinétique est conservée, donc:

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1'^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2'^2$$

Ces deux relations sont formellement identiques à celles que l'on trouve au point b) avec les masses remplacées par les moments d'inertie.

D'après le formulaire on trouve: $\omega'_2 = \frac{2I_1}{I_1 + I_2} \omega_1 = \frac{2/3}{1/3 + 1/2} \omega_1 = \frac{4}{5} \omega_1$

Remarque : si une masse m_1 est attachée à la tige, $I_1 = I_{Oz} = \frac{4}{3} ml^2$ et alors $\omega'_2 = \frac{2I_1}{I_1 + I_2} \omega_1 = \frac{8/3}{4/3 + 1/2} \omega_1 = \frac{16}{11} \omega_1$

f) (2 points)

D'après c) on a $d = v'_2 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = (\omega'_2 l)^2 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

En utilisant l'expression pour ω'_2 trouvée au point e), on obtient $d = \frac{16}{25} (\omega_1 l)^2 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

D'après le résultat au point d), on trouve que $d = \frac{48}{25} gl (\cos \alpha - \cos \theta_1) \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

Donc $\cos \theta_1 = \cos \alpha - \frac{25 d}{96 l \sin \alpha \cos \alpha}$

N.B.: Si m_1 attachée à la tige: $d = \frac{256}{121} (\omega_1 l)^2 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

Donc: $\cos \theta_1 = \cos \alpha - \frac{121 d}{1152 l \sin \alpha \cos \alpha}$

3 Points de Lagrange (23 points)

a) [1 pt] $L_O = mr^2 \omega$

b) [2 pt] D'après le formulaire, $V_{eff} = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{C}{r}$. Pour une valeur donnée de L_O , la trajectoire circulaire a pour rayon la valeur de r qui minimise V_{eff} . Elle vérifie:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{L_O^2}{mr^3} + \frac{C}{r^2} = 0$$

ce qui conduit à:

$$r_0 = \frac{L_O^2}{mC}$$

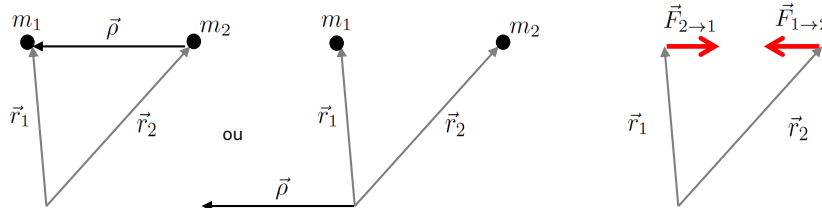
c) [1 pt]

$$\omega = \frac{L_O}{mr_0^2} = \frac{\sqrt{mCr_0}}{mr_0^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{C}{mr_0^3}}$$

d) [2 pt] Dans un mouvement circulaire, l'accélération centripète vaut $\vec{a} = -r_0 \omega^2 \vec{e}_r$. Ici, la force centripète est causée par la gravité, $\vec{F} = -\frac{C}{r_0^2} \vec{e}_r$. D'où

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{C}{r_0^2} = mr_0 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{C}{mr_0^3}}$$

e) [2 pt]



f) [2 pt]

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Or,

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho}$$

Si on définit la masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$\vec{\rho}$ satisfait donc l'équation

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho}$$

C'est l'équation d'une particule de masse μ dans un potentiel central $V(\rho) = -\mathcal{G} m_1 m_2 / \rho$.

g) [1 pt] D'après la question c), on a:

$$\omega^2 = \frac{C}{\mu \rho_0^3}$$

avec

$$C = \mathcal{G} m_1 m_2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ce qui conduit à

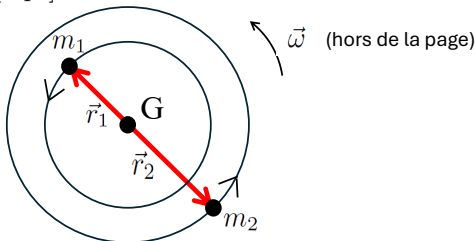
$$\omega^2 = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{\rho_0^3}$$

h) [2 pt] Il faut inverser le système :

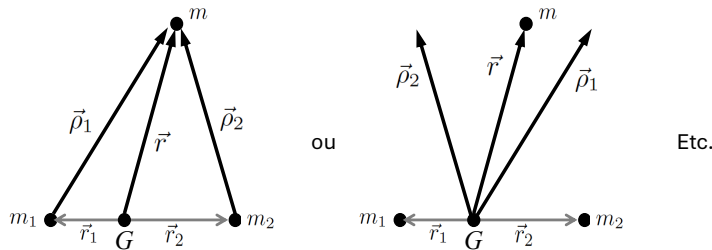
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{\rho} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{\rho}$$

i) [2 pt]



j) [1 pt]



k) [2 pt]

La masse est soumise à l'action de 3 forces:

- L'attraction de m_1 :

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mathcal{G} m m_1}{\rho_1^3} \vec{\rho}_1$$

- L'attraction de m_2 :

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mathcal{G}mm_2}{\rho_2^3}\vec{\rho}_2$$

- Les forces d'inertie. Comme G est fixe dans le référentiel tournant, que la vitesse de rotation $\vec{\omega}$ est indépendante du temps, et que m est au repos, donc $\vec{r}$ indépendant du temps, la seule force d'inertie est la force d'entraînement centrifuge

$$\vec{F}_e = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -m[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}] = m\omega^2 \vec{r}$$

soit

$$\vec{F}_e = \frac{\mathcal{G}m(m_1 + m_2)}{\rho_0^3}\vec{r}$$

1) [2 pt]

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{\rho}_1 &= \vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = -\vec{u} \cdot \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \cdot \vec{\rho} \\ \vec{u} \cdot \vec{\rho}_2 &= \vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = -\vec{u} \cdot \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u} \cdot \vec{\rho}\end{aligned}$$

Pour que la masse m soit fixe, il faut que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_e = \vec{0}$$

En faisant le produit scalaire avec $\vec{u}$, il vient:

$$\frac{\mathcal{G}mm_1}{\rho_1^3} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \cdot \vec{\rho} - \frac{\mathcal{G}mm_2}{\rho_2^3} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u} \cdot \vec{\rho} = 0$$

ce qui implique

$$\rho_1 = \rho_2$$

m) [2 pt] En faisant le produit scalaire de la somme des forces avec $\vec{v}$, il vient:

$$-\frac{\mathcal{G}mm_1}{\rho_1^3} \vec{v} \cdot \vec{\rho}_1 - \frac{\mathcal{G}mm_2}{\rho_2^3} \vec{v} \cdot \vec{\rho}_2 + \frac{\mathcal{G}m(m_1 + m_2)}{\rho_0^3} \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Or, comme $\vec{r}_1$ est parallèle à ρ , donc perpendiculaire à $\vec{v}$, on a $\vec{v} \cdot \vec{\rho}_1 = \vec{v} \cdot \vec{r}$. De même, $\vec{v} \cdot \vec{\rho}_2 = \vec{v} \cdot \vec{r}$. Enfin, $\rho_2 = \rho_1$. On a donc:

$$-\frac{\mathcal{G}mm_1}{\rho_1^3} - \frac{\mathcal{G}mm_2}{\rho_1^3} + \frac{\mathcal{G}m(m_1 + m_2)}{\rho_0^3} = 0$$

ce qui implique $\rho_1 = \rho_0$, et finalement

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_0.$$

n) [1 pt]

Les 3 masses m , m_1 et m_2 forment un triangle équilatéral de rayon ρ_0 dans le plan dans lequel les masses m_1 et m_2 tournent. Il y a donc deux positions d'équilibre.

