
**Ne pas ouvrir ni tourner ce feuillet avant le début de l'examen
... mais lire attentivement cette page de couverture**

SEUL LE CAHIER DE RÉPONSES SERA CORRIGÉ

Avant le début de l'examen

- Vérifiez les informations présentes sur le cahier de réponses
- Signez la page de garde du cahier de réponse
- Posez votre carte d'étudiant(e) (ou autre pièce d'identité) sur la table devant vous.
- Ne laissez sur votre table que le matériel autorisé, à savoir:
 - formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto;
 - stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon;
 - boisson + ravitaillement léger.
- **Attendez le signal pour ouvrir ce feuillet et débiter l'examen**

Pendant l'examen

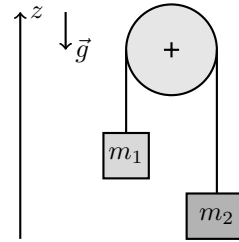
- **Répondez à chaque question de chaque problème dans la partie correspondante du cahier, en justifiant vos réponses.**
- Écrivez lisiblement le développement menant à la solution.
- La place étant limitée, utilisez d'abord les feuilles de brouillon avant de reporter vos réponses au propre.
- En dernier recours, un espace supplémentaire est disponible à la fin du cahier. Si vous devez l'utiliser, **merci de bien l'indiquer dans l'espace de la question correspondante.**
- Ne dégrafez pas les pages du cahier.
- Ne laissez pas vos brouillons ou vos solutions visibles à côté de vous.
- Ne quittez pas la salle sans autorisation.

A la fin de l'examen (après 3h30 ou quand vous avez terminé)

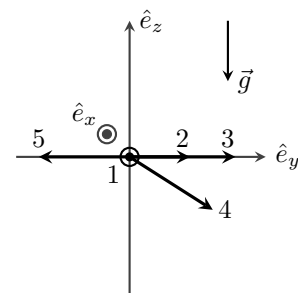
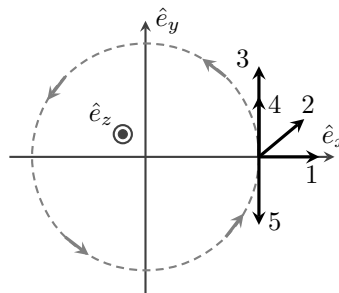
- Restez assis(e) à votre place, en silence, et attendez l'arrivée d'un surveillant.
- **Rendez le cahier de réponses signé et le feuillet d'énoncé (non corrigé) en mains propres à un surveillant qui vous fera signer la liste de présence.**

1 Questionnaire à choix multiples (12 points)

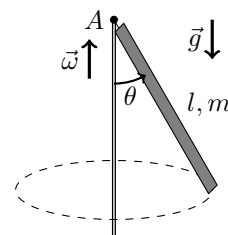
a) On considère le montage ci-contre, réalisé avec une corde inextensible sans masse et une poulie de centre fixe. La corde, qui ne glisse pas sur la poulie, soutient deux masses $m_1 < m_2$. Le système est placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Soit $a_1 = \ddot{z}_1$ l'accélération de la masse m_1 lorsque la poulie est sans masse, et a'_1 son accélération lorsque la poulie est un cylindre homogène de masse non nulle. Cochez l'affirmation correcte sur le cahier de réponses.



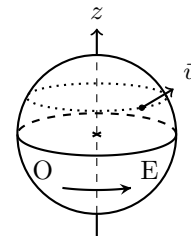
b) Un point matériel de masse m est relié à une ficelle sans masse de longueur fixe et décrit un cercle dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ ($\omega > 0$). Soudain, la ficelle casse. Les dessins représentent la situation immédiatement après cet instant, avec $\hat{e}_z$ dirigé verticalement vers le haut. Choisissez la direction correcte du vecteur vitesse de l'objet parmi les cinq propositions.



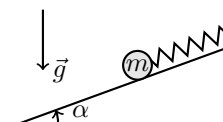
c) On considère un cylindre homogène de longueur l et de masse m relié en A à une tige fine rigide de masse négligeable devant m . L'attache est réalisée de manière à ce que le cylindre puisse pivoter librement dans toutes les directions autour du support en A . On suppose que le cylindre tourne à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ verticale et avec un angle θ constant. Choisissez l'affirmation correcte concernant la force exercée par la tige sur le cylindre en A .



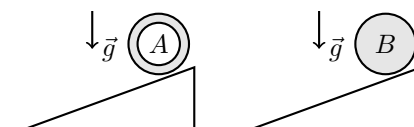
d) Une fusée décolle verticalement avec une vitesse $\vec{v}$ depuis la base de Cape Canaveral en Floride, indiquée par un point sur le schéma ci-contre (le nord est vers le haut). Quel est l'effet de la rotation de la Terre (d'ouest en est) sur la trajectoire de la fusée, mesurée depuis une station au sol ?



e) On considère un point matériel retenu par un ressort (dont l'autre extrémité est fixe) et pouvant glisser sur un plan incliné sans frottement. Quelle est l'affirmation correcte ?



f) Deux cylindres de dimensions identiques et de même masse totale sont lâchés sans vitesse initiale du haut d'un plan incliné. Ils roulent sans glisser. Le cylindre A est creux avec un trou centré sur son axe de rotation, et sa masse est répartie de façon homogène hors du trou. Le cylindre B est plein et homogène. Quel est le cylindre qui arrive le premier en bas de la pente ?

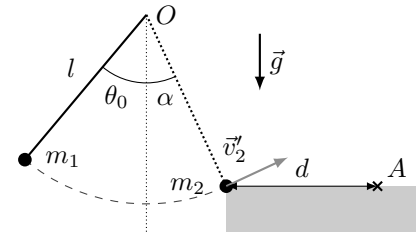


2 Jeu du pendule (18 points)

Le problème se compose de deux parties qui peuvent être abordées de manière indépendante. On considère chaque choc comme instantané, ce qui permet de négliger l'effet de la pesanteur sur les quantités conservées lors du choc. On négligera aussi tout frottement et on admettra que le mouvement a lieu dans le plan de la feuille.

Partie A

Un jeu d'adresse est constitué d'une masse ponctuelle $m_1 = m$ reliée à une ficelle inextensible et sans masse de longueur l . On écarte m_1 de la verticale avec un angle θ_0 et on la lâche sans vitesse initiale. Lorsque le pendule est remonté à l'angle α , la masse m_1 frappe une masse $m_2 = m/2$ avec un choc élastique frontal, c'est-à-dire tel que toutes les vitesses avant et après le choc sont colinéaires. Le but du jeu est que la masse m_2 tombe dans un godet placé en A à une distance d de son point de départ, à la même hauteur, sans toucher le sol avant.



Les données sont : m , l , α , et d .

- Calculer la vitesse v_1 (en norme) de m_1 juste avant le choc, en fonction des données et de θ_0 . Justifiez vos calculs.
- Calculer la vitesse v_2' (en norme) de m_2 juste après le choc en fonction de v_1 , en expliquant et justifiant toute loi de conservation que vous utilisez.
- Quelle doit être la valeur de $\cos \theta_0$, en fonction des données, pour que m_2 tombe dans le godet en A ? Détaillez vos calculs.

Partie B

On remplace le pendule simple par un pendule solide constitué d'une tige cylindrique homogène de longueur l , de masse m et de rayon négligeable devant l . On appelle θ_1 l'angle initial d'où la tige est lâchée.

- Calculer la vitesse angulaire ω_1 de la tige juste avant l'impact, en fonction des données et de θ_1 . Justifiez vos calculs.
- Juste après le choc, la norme de la vitesse de m_2 peut s'écrire sous la forme $v_2' = l \omega_2'$. Exprimer v_2' en fonction de ω_1 , en expliquant et justifiant toute loi de conservation que vous utilisez.
- En déduire la valeur de $\cos \theta_1$ qui permet à m_2 de retomber en A . Il est permis de réutiliser certains résultats de la question **c**).

3 Points de Lagrange (22 points)

On considère un point matériel P de masse m dans un potentiel central $V(r) = -\mathcal{C}/r$, où $\mathcal{C}$ est une constante et $r = |\vec{OP}|$.

- a) Rappeler l'expression de la norme du moment cinétique $|\vec{L}_O| = L_O$ pour un mouvement circulaire de rayon r en fonction de la vitesse angulaire ω et de la masse m .
- b) En utilisant le potentiel effectif, calculer le rayon r_0 de la seule trajectoire circulaire pour une valeur donnée de L_O .
- c) En déduire la vitesse angulaire ω d'une trajectoire circulaire de rayon r_0 en fonction de r_0 , m et $\mathcal{C}$.
- d) Retrouver l'expression de ω sans passer par le potentiel effectif, mais en considérant l'accélération centripète et la force qui dérive du potentiel $V(r) = -\mathcal{C}/r$.

On considère désormais deux corps de masses m_1 et m_2 soumis à leur attraction gravitationnelle réciproque. On repère leurs positions par $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, et on pose $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

- e) Faire un schéma montrant $\vec{\rho}$ et les forces.
- f) Établir l'équation du mouvement de $\vec{\rho}$, et vérifier qu'elle correspond à celle d'une particule de masse μ dans un potentiel central $V(\rho) = -\mathcal{G}m_1m_2/\rho$, où μ est une masse effective que l'on déterminera.
- g) Expliquer comment déduire des questions précédentes que la vitesse angulaire ω d'une trajectoire circulaire de rayon ρ_0 satisfait:

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{\rho_0^3}$$

On pourra admettre ce résultat par la suite.

- h) Exprimer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ en fonction de $\vec{\rho}$ et du vecteur $\vec{R}$ décrivant la position de leur centre de masse G .
- i) On choisit désormais G comme origine, c'est à dire $\vec{R} = \vec{0}$. Dans le cas où $m_1 > m_2$, et que $\vec{\rho}$ décrit un cercle de rayon ρ_0 dans le sens trigonométrique, faire un schéma montrant les vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ à un instant arbitraire, le vecteur $\vec{\omega}$, ainsi que l'allure des trajectoires des deux corps.

On considère enfin un troisième corps de masse m soumis à l'attraction des deux corps de masses m_1 et m_2 . On néglige l'effet de l'attraction de la masse m sur les corps m_1 et m_2 , et on suppose que ces deux corps suivent la trajectoire déterminée à la question 2, avec $|\vec{\rho}| = \rho_0$ et le centre de masse choisi comme origine fixe. On repère la position du corps m par le vecteur $\vec{r}$, et on introduit les notations $\vec{\rho}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1$ et $\vec{\rho}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2$. L'objectif de cette question est de chercher s'il y a des positions d'équilibre dans le référentiel tournant telles que $\vec{r}$ ne soit pas parallèle à $\vec{\rho}$.

- j) Pour $m_1 > m_2$ et une position arbitraire de la masse m (non colinéaire avec m_1 et m_2), faire un schéma des vecteurs $\vec{r}$, $\vec{\rho}_1$ et $\vec{\rho}_2$.
- k) Déterminer les forces auxquelles le corps m est soumis à l'équilibre dans le référentiel tournant lié aux corps m_1 et m_2 . On les exprimera en fonction de $\vec{r}$, $\vec{\rho}_1$ et $\vec{\rho}_2$.
- l) Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan $(\vec{r}, \vec{\rho})$ perpendiculaire à $\vec{r}$. En utilisant les résultats des questions **h,i**), exprimer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{\rho}_1$ et $\vec{u} \cdot \vec{\rho}_2$ en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{\rho}$. En projetant la force totale sur $\vec{u}$, établir une relation entre ρ_1 et ρ_2 .
- m) Soit maintenant $\vec{v}$ un vecteur du plan $(\vec{r}, \vec{\rho})$ perpendiculaire à $\vec{\rho}$. En projetant la force totale sur ce vecteur, en déduire la relation entre ρ_1 , ρ_2 et ρ_0 . On pourra utiliser la relation établie en **g**).
- n) Dessiner les positions d'équilibre sur un schéma.