VII. Matrices semblables

Nous étudierons aujourd'hui plus spécialement les matrices carrées : le calcul de l'inverse, puis la notion de similitude pour des matrices carrées, une notion plus restrictive que celle d'équivalence, mais qui fait plus de sens au moment de l'interprétation géométrique d'une application linéaire.

1 Bref retour sur les systèmes d'équations

Considérons un système d'équations linéaires de la forme $AX = b$, où $A \in M_{n\times m}(K)$ est la matrice des coefficients, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne des inconnues.

On appelle A la *matrice du système* et $(A|b)$ la matrice *augmentée* du système.

Proposition 1.1. *Le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si les rangs des matrices A et $(A|b)$ sont égaux.*

$A \iff B \quad \equiv \quad \text{non} B \iff \text{non} A$

(*) *Démonstration. Par double contraposition.* Lorsqu'on échelonne la matrice augmentée du système, on arrive dans l'une des lignes à une équation sans solution de la forme $0 = c$ avec $c \neq 0$ si et seulement $\underbrace{\ }_{\text{si}}$ les rangs des matrices A et $(A|b)$ sont distincts. □

Exemple 1.2. Nous voulons résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad\ \ + z = 0 \\ \quad\ \ y \quad\ \ = a \end{cases}$$

(*) Démo directe : $\exists$ solution $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \iff AX = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = b$

$\iff$ b est une combinaison linéaire des colonnes de A.

$\iff \text{rang}(A) = \text{rang}(A \,\vdots\, b)$

Echelonnons la matrice augmentée de ce système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{P_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

On a une solution si et seulement si $a = 1$.

Dans ce cas, $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$, $z = \lambda \in \mathbb{R}$ $\iff S = \{(-\lambda ; 1 ; \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

2 Inversion de matrices

Les méthodes d'échelonnement et de réduction permettent non seulement de résoudre à coup sûr tous les systèmes d'équations linéaires, mais aussi de calculer l'inverse d'une matrice carrée pour autant qu'il existe. La méthode est basée sur l'observation qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A correspond à multiplier la matrice par la matrice élémentaire correspondante à gauche. Ainsi, pour calculer l'inverse d'une matrice inversible $S \in GL_n(K)$ ou pour décider si elle est inversible, on peut écrire côte à côte les matrices S et I_n, puis effectuer des opérations élémentaires simultanément sur S et I_n jusqu'à obtenir la matrice I_n et une autre matrice à ses côtés. Cette matrice sera S^{-1} !

Exemple 2.1. On cherche l'inverse de la matrice carrée $S = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-a)]{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right)$$

S n'est pas inversible si $a = 1$. On suppose $a \neq 1$ et on continue :

$$\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{a-1}\right) E_{32}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1 & 1 & -1-a \end{array}\right)$$

$2-a-a^2 = -(a^2+a-2) = -(a+2)(a-1) \Rightarrow S$ pas inversible si $a \in \{1 ; -2\}$

On suppose $a \notin \{1 ; -2\}$ et on continue :

$$\xrightarrow{D_3\left(\frac{1}{2-a-a^2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2-a-a^2} & \frac{1}{2-a-a^2} & \frac{-(a+1)}{2-a-a^2} \end{array}\right)$$

$(*)\quad -au + u(a+1) = u$

$(*)\quad S^{-1} = E_{12}(-1)E_{13}(-a)E_{23}(1)\cdot D_3\left(\frac{1}{2-a-a^2}\right)D_2\left(\frac{1}{a-1}\right)E_{32}(1)E_{21}(-1)E_{31}(-a)P_{13}$

La matrice est échelonnée.

Posons $u = \dfrac{1}{2-a-a^2}$ pour simplifier l'écriture et réduisons la matrice :

$$\xrightarrow{E_{13}(-a)E_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -au & -au & 1+a(a+1)u \\ 0 & 1 & 0 & u & \frac{1}{a-1}+u & \frac{1}{1-a}-(a+1)u \\ 0 & 0 & 1 & u & u & -(a+1)u \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -u(a+1) & u^{(*)} & u \\ 0 & 1 & 0 & u & -u(a+1) & u \\ 0 & 0 & 1 & u & u & -(a+1)u \end{array}\right)$$

S inversible $\iff a \in \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$ et

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -u(a+1) & u & u \\ u & -u(a+1) & u \\ u & u & -(a+1)u \end{pmatrix} \quad (*)$$

Proposition 2.2. *Soit $A \in M_n(K)$.*
Alors le système $Ax = b$ admet une solution $\forall\, b \in M_{n\times 1}(K)$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. $\det(A) \neq 0 \iff A$ inversible (Thm 4.7, Chap V)

$\iff$ en échelonnant-réduisant $(A \mid I)$, on obtient $(I \mid A^{-1})$

$\iff$ en échelonnant-réduisant $(A \mid b)$, on obtient $(I \mid X_b)$

$\iff A\cdot X_b = b \iff X_b$ est solution de $Ax = b$

et $X_b = A^{-1}b$ car $AX_b = \underbrace{AA^{-1}}_{=I}b = b$. □

Remarque 2.3. Si $\det(A) = 0$, alors le système est impossible ou indéterminé. On peut alors échelonner la matrice augmentée pour trouver la solution.

Exemple 2.4. Résoudre le système $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

$AX = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C'est S de l'exemple 2.1 avec $a = 2$.

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

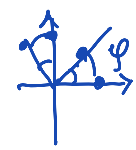
$S = \{(2;0;-1)\}$

3 Matrices semblables

Lorsqu'on travaille avec des applications linéaires de V dans lui-même, on préfère fixer une seule base de V, au lieu de considérer une base de V comme espace vectoriel de départ et une autre comme espace d'arrivée. Nous avons le droit de le faire lorsque nous parlons de matrices ou d'applications linéaires équivalentes, mais le sens géométrique des applications devient obscur.

Exemple 3.1. Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0;0)$ et d'angle $\varphi = 17,345^o$.
Si l'on s'autorise à choisir deux bases différentes de $\mathbb{R}^2$, on arrive à obtenir I_2 comme matrice de cette rotation. En effet,

Si $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2)$ est la base canonique et $\mathcal{C} = (f_1 ; f_2)$ avec $f_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Construisons $(\rho)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:



$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$ et $\rho(e_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$

si bien que $R = (\rho)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui n'est pas très parlant pour identifier la nature de ρ

Par conséquent, nous décidons de fixer une seule base $\mathcal{B}$ de V et de représenter une application linéaire $\alpha : V \to V$ par la matrice carrée $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Définition 3.2. Deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont *semblables* et on note $A \approx B$ s'il existe une matrice inversible $S \in GL_n(K)$ telle que $A = SBS^{-1}$.
(pour les matrices équivalentes $A = PBQ$)

Puisqu'une matrice de changement de base est une matrice inversible, nous obtenons le résultat suivant de la même façon que nous avons démontré le résultat correspondant sur les matrices équivalentes.

Théorème 3.3. *Deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont semblables si et seulement si elles représentent la même application linéaire $\alpha : K^n \to K^n$, c'est-à-dire s'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de K^n telles que $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ et $B = (\alpha)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de K^n et $S = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Alors le diagramme

$$(V, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id_V} (V, \mathcal{C}) \xrightarrow{\alpha} (V, \mathcal{C}) \xrightarrow{Id_V} (V, \mathcal{B})$$

illustre l'égalité matricielle $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\alpha)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = S^{-1}BS$. □

Exemple 3.4. Décrire géométriquement l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(x;y;z) = (-0,8\cdot y - 0,6\cdot z; 0,8\cdot x + 0,36\cdot y - 0,48\cdot z; 0,6\cdot x + 0,64\cdot z - 0,48\cdot y).$$

La matrice de α dans la base canonique n'est pas très jolie :

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 20 & 9 & -12 \\ 15 & -12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et nous ne voyons pas de quoi il s'agit.
Choisissons judicieusement une autre base de $\mathbb{R}^3$, par exemple $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = \frac{4e_2 + 3e_3}{5} \quad \text{et} \quad f_3 = \frac{-3e_2 + 4e_3}{5}.$$

Calculons les images des f_i.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \Longrightarrow \alpha(f_1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = f_2$$

$$f_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha(f_2) = A\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} -125 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -f_1$$

$$f_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha(f_3) = A\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 0 \\ -75 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = f_3$$

Ainsi, la matrice de α relative à $\mathcal{B}^* = (f_1; f_2; f_3)$ vaut

$$A^* = (\alpha)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^* est la matrice d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe de direction f_3,

Remarquons que la base $\mathcal{B}^*$ que nous avons choisie est constituée de vecteurs de norme 1, orthogonaux deux à deux, et il s'agit d'une base directe, orientée comme la base canonique.

4 Valeurs propres et vecteurs propres

Pour construire la matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$, nous sommes maintenant convaincus qu'une base vaut parfois mieux qu'une autre car l'interprétation géométrique est plus immédiate. Nous allons voir cette semaine quelques outils qui nous permettront par la suite de savoir s'il existe une base par rapport à laquelle la matrice de α est diagonale, et le cas échéant de trouver une telle base.
Pour cela, revenons dans le monde des matrices.

Définition 4.1. Un scalaire $\lambda \in K$ est *valeur propre* de la matrice $A \in M_n(K)$ s'il existe un vecteur non-nul $v \in M_{n\times 1}(K)$ tel que $Av = \lambda v$.
Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* pour la valeur propre λ. L'*espace propre* E_λ est le sous-espace vectoriel de K^n formé de tous les vecteurs $v \in M_{n\times 1}(K)$ tels que $Av = \lambda v$.

Exemple 4.2. Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier que $u = (2; 1; 1)$ est un vecteur propre de α et préciser la valeur propre λ associée.
Donner une base de l'espace propre E_λ.

$$Au = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot u$$

u est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Calculons E_1 : $Av = 1 \cdot v$ avec $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4z = x \\ 2x - y - 2z = y \\ 2x - 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

$$E_1 = \langle (2; 1; 1) \rangle$$

Il est facile de montrer directement que E_λ est un sous-espace, mais nous pouvons aussi nous appuyer sur l'identification suivante :

Proposition 4.3. *Soit λ une valeur propre de la matrice $A \in M_n(K)$. Alors l'espace propre E_λ est le noyau de $A - \lambda I_n$.*

Démonstration.

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda I v = 0$$
$$\iff (A - \lambda I) v = 0$$
$$\iff v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

(v est non-nul par définition d'un vecteur propre)

□

Ainsi, pour découvrir les valeurs propres, puis calculer les espaces propres associés, il faut étudier la matrice $A - \lambda I_n$, trouver les valeurs de λ pour lesquelles le rang de cette matrice n'est pas maximal car si le rang est n, le noyau est réduit au vecteur nul et donc λ n'est pas une valeur propre. Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant de la matrice.

Corollaire 4.4. *Soit la matrice $A \in M_n(K)$. Alors λ est une valeur propre de A si et seulement si* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Démonstration.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \overset{\text{def.}}{\iff} \exists v \neq 0 \text{ t.q. } Av = \lambda v$$
$$\iff \exists v \neq 0 \text{ t.q } (A - \lambda I) v = 0$$
$$\iff v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$
$$\iff A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}$$
$$\overset{\text{Thm 4.7, Chap 5}}{\iff} \det(A - \lambda I) = 0$$

□

Exemple 4.5. Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donnée dans l'exemple 4.2.
Déterminer l'autre valeur propre de α, ainsi qu'une base de l'espace propre associé.
Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}^*$ formée de vecteurs propres et déterminer la matrice de α relativement à cette base $\mathcal{B}^*$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (3-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 2(-1-\lambda)(-4) \\ &= -(1+\lambda)\left(\lambda^2 - 9 + 8\right) \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

On sait que $E_1 = \langle (2 ; 1 ; 1) \rangle$

On calcule E_{-1} : $A - (-1)I = A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$(A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$E_{-1} = \langle (1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0) \rangle$$

On pose $B^* = \big((2 ; 1 ; 1) ; (1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0) \big)$

d'où $(\alpha)_{B^*}^{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Il s'agit d'une symétrie d'axe $(2 ; 1 ; 1)$ dans l'espace, les vecteurs du plan $\langle (1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0) \rangle$ sont inversés.