

Exercice 1. Pour s'échauffer - Limite de suites

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer sa limite, quand celle-ci existe. Sinon, établir si la suite est bornée ou non, et quand elle est bornée, donner une sous-suite convergente.

1. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(\sqrt[k+2]{2}, \frac{k}{k+1} \right)$.
2. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ définie par $x_k = \left(\frac{(-1)^k}{k}, 1 - \frac{1}{k}, 1 \right)$.
3. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right)$.
4. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ définie par $x_k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}, \frac{\ln(k+1)}{k} \right)$.
5. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(k, e^{-k} \right)$.

Correction.

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (1, 1)$.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (0, 1, 1)$.
3. La suite ne converge pas, mais est bornée. $x_{4k} = (1, 0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (1, 0)$.
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (0, 0, 0)$.
5. La première composante diverge, donc la suite ne converge pas, et n'est pas bornée.

Exercice 2. Boule unité en norme p

On définit la boule ouverte, en norme p , de rayon R centrée en x_0 dans $\mathbb{R}^n$ par

$$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\|_p < R\}.$$

Représentez $B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$ pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = \infty$.

Correction.

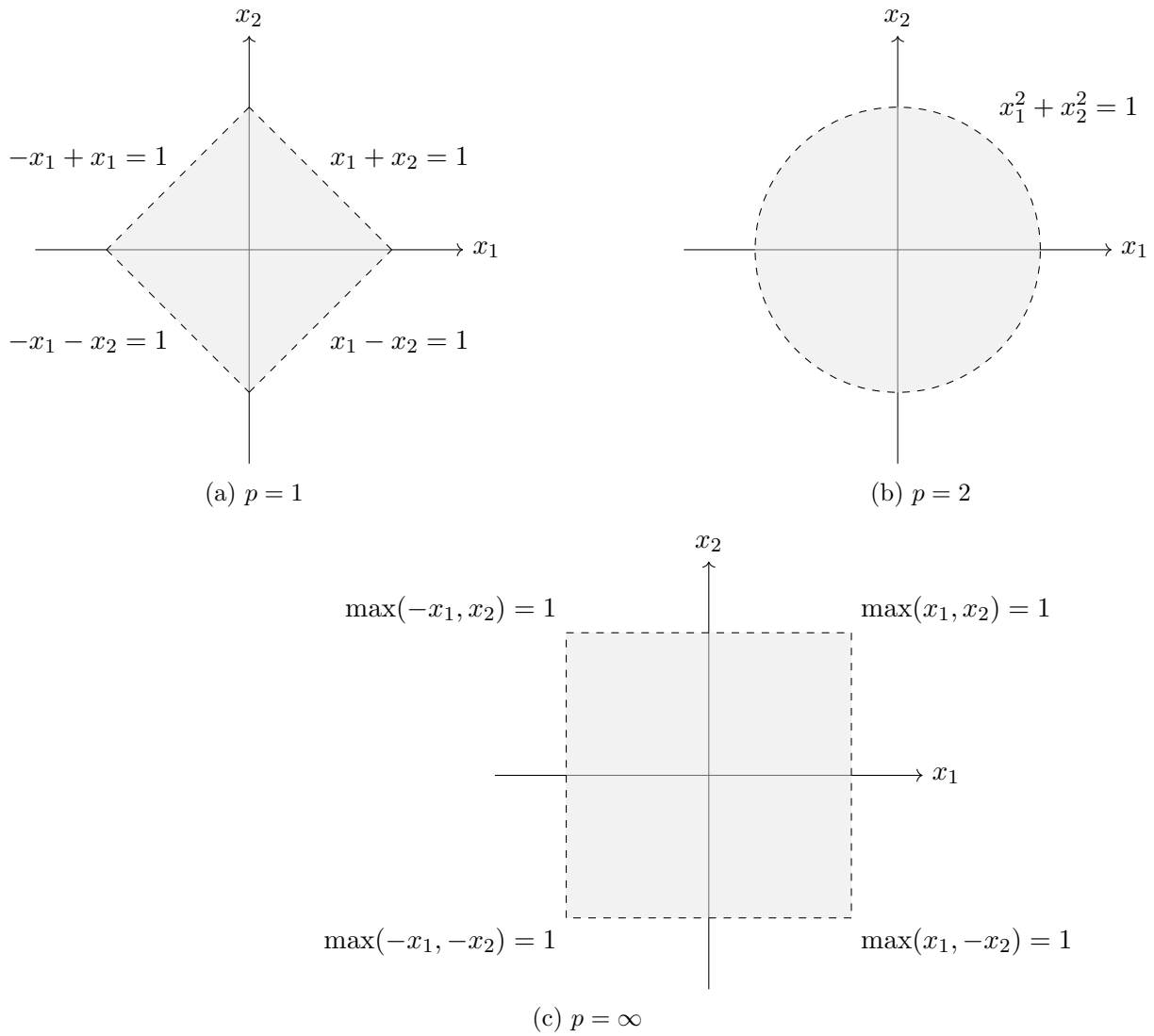


Figure 1: Boule ouverte unité en norme p .

Démarche : Identifier $\partial B((0,0),1) = S((0,0),1)$ la "sphère" de rayon 1 en norme p dans $\mathbb{R}^2$.

- $p = 1$, identifier $|x_1| + |x_2| = 1$,
- $p = 2$, identifier $x_1^2 + x_2^2 = 1$,
- $p = \infty$, identifier $\max(|x_1|, |x_2|) = 1$.

Exercice 3. Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$

Pour chacun des ensembles ci-dessous, le représenter graphiquement dans le plan Oxy , en indiquant le bord ∂E , puis dire s'il est ouvert ? fermé ? borné ?

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 - x\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\}$
4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ et } y = x^2\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$
6. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 1 \text{ et } 0 < y \leq x^2\}$
7. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < 1 \text{ et } 0 < y < 1 - x^2\}$
8. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$
9. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
10. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$

Correction.

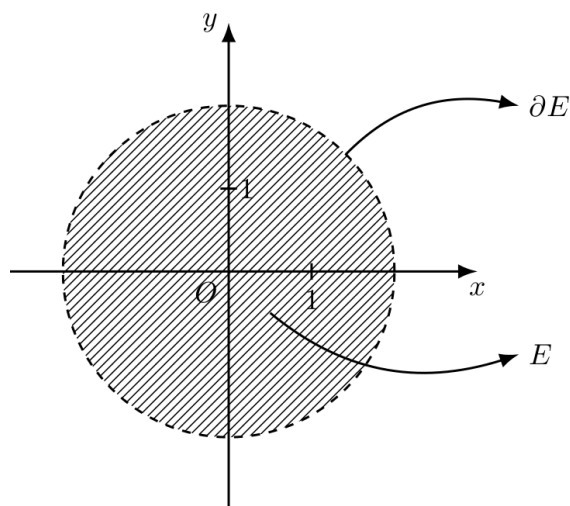
On rappelle les critères suivants pour déterminer si un ensemble est ouvert ou fermé.

- Dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ si la frontière est dans l'ensemble, l'ensemble est fermé, si la frontière n'est pas dedans, l'ensemble est ouvert.
- Un ensemble qui a une dimension plus petite que n ne peut pas être ouvert (un plan dans $\mathbb{R}^3$, une droite dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une courbe, etc...). Cela ne veut pas pour autant dire qu'il est fermé (attention !)
- Une condition faisant intervenir $<, >, \neq$ définit une partie ouverte.
- Une condition faisant intervenir $\leq, \geq, =$ définit une partie fermée.
- Un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.
- Un ensemble est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.
- Une union quelconque d'ouverts est ouverte.
- Une union finie de fermés est fermée.
- Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

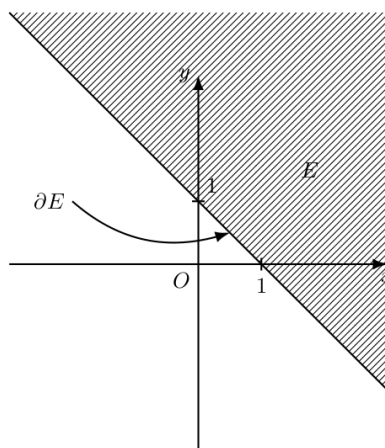
Dans les figures ci-dessous, on représente par

- des traitsillés, les parties du bord qui n'appartiennent pas à l'ensemble;
- des traits pleins, les parties du bord qui appartiennent à l'ensemble;
- l'intérieur de l'ensemble par des lignes hachurées;
- pour les courbes, des points noirs si les extrémités font parties de la courbe;
- pour les courbes, des points blancs si les extrémités ne font pas parties de la courbe.

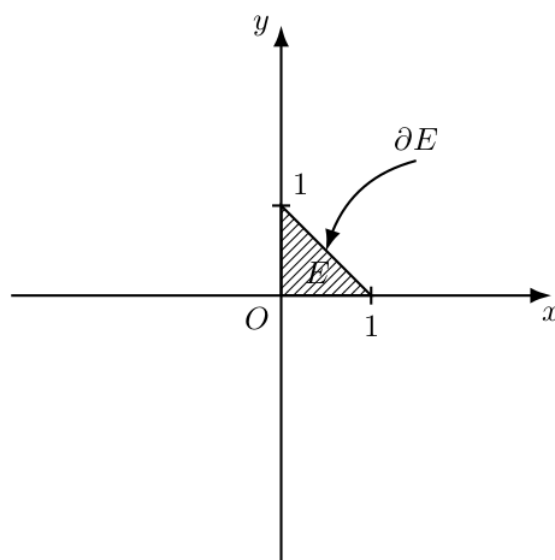
1. L'ensemble est le disque de rayon 2, sans son bord (inégalité stricte). Il est donc ouvert. Le bord de E est le cercle de rayon 2. E est borné puisque pour tout $x \in E$, $\|x\| < 2$.



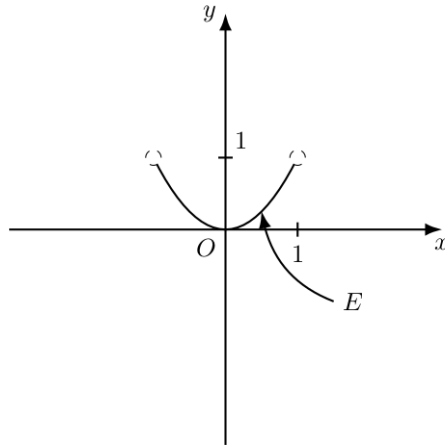
2. L'ensemble est la partie du plan au-dessus de la droite $y = 1 - x$. Il est fermé car contient la droite (inégalité large $\leq$), qui est son bord. Il n'est pas borné.



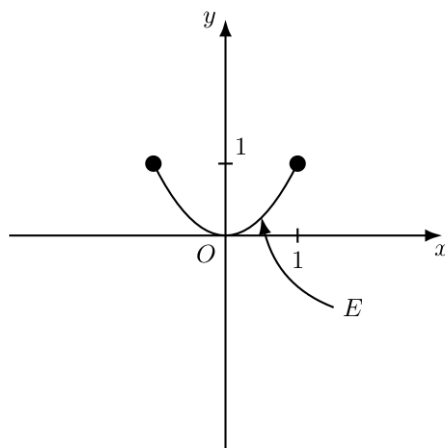
3. L'ensemble E est le triangle plein de sommet $(0,0), (1,0), (0,1)$. Il est fermé car contient son bord. Il est borné.



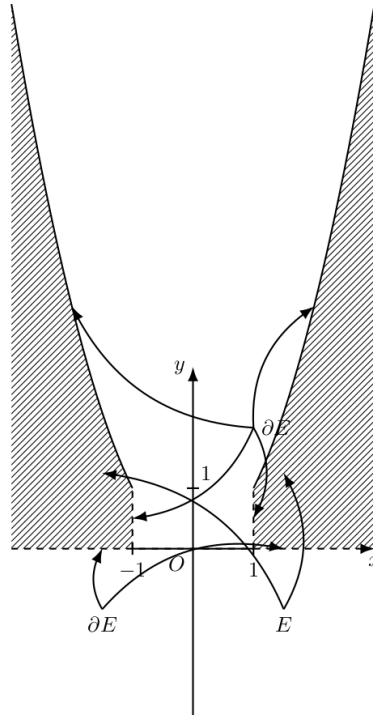
4. L'ensemble E est le graphe de la fonction x^2 , pour x strictement compris entre -1 et 1 . Il n'est pas ouvert (c'est une courbe, donc un ensemble de dimension 1). Il n'est pas fermé non plus car les extrémités ne font pas partie de l'ensemble (on mélange " $<$ " avec " $=$ "). Le bord ∂E est $\partial E = E \cup \{(-1, 1), (1, 1)\}$. E est borné.



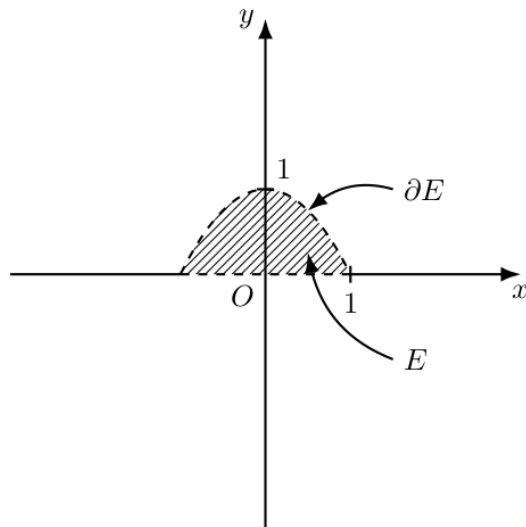
5. L'ensemble E est le graphe de la fonction x^2 , pour x entre -1 et 1 . Contrairement à l'ensemble du point (4), il est fermé car contient les extrémités. Son bord ∂E est lui-même : $\partial E = E$. Il est borné



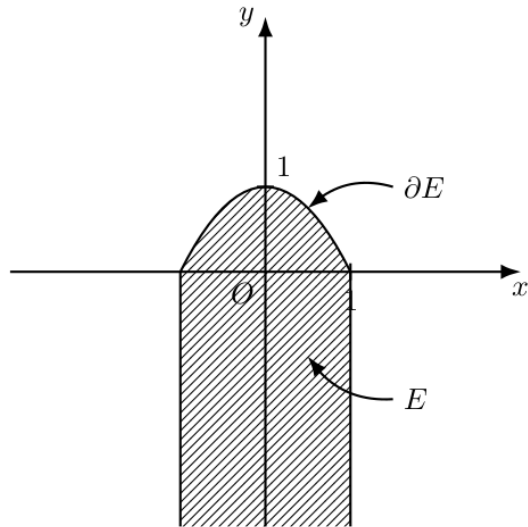
6. L'ensemble E est l'union des parties comprise entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 0$, pour $x > 1$ ou $x < -1$. L'ensemble n'est ni fermé, ni ouvert (la parabole fait parti de l'ensemble, mais pas les parties rectiglignes de ∂E). L'ensemble n'est pas borné.



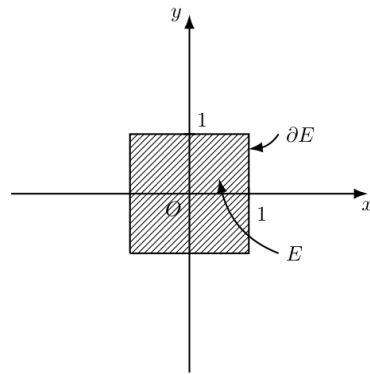
7. L'ensemble E est l'ensemble compris entre le parabole $y = 1 - x^2$ et la droite $y = 0$, pour x strictement entre -1 et 1 . Il est ouvert (inégalités stricte) et borné.



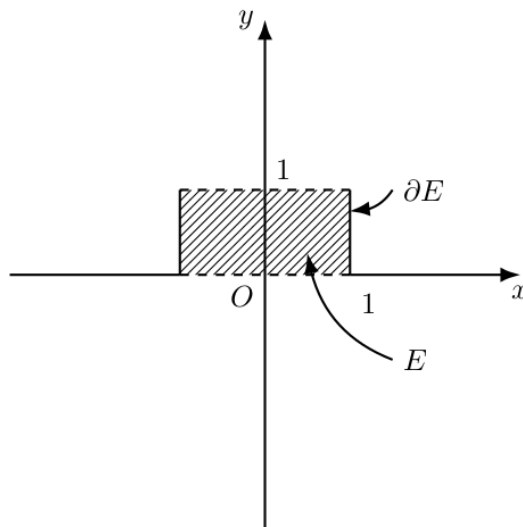
8. L'ensemble E est la partie comprise sous la parabole $y = 1 - x^2$ pour x entre -1 et 1 . L'ensemble est fermé car contient son bord (inégalités larges). Il n'est pas borné.



9. L'ensemble E est le carré de de sommet $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$. Il est fermé car contient son bord (inégalités larges). Il est borné.



10. L'ensemble E est le rectangle de base 2 et de hauteur 1, de sommet $(-1, 0), (1, 0), (1, 1), (-1, 1)$. Il n'est ni fermé ni ouvert (le base et le sommet ne font pas parties de l'ensemble). Il est borné.



Exercice 4. Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^3$

Pour chacun des ensembles ci-dessous, le représenter graphiquement dans l'espace $Oxyz$, en indiquant le bord ∂E , puis dire s'il est ouvert ? fermé ? borné ?

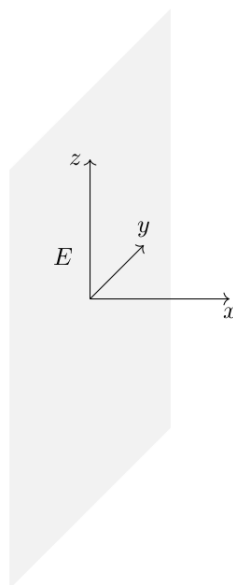
1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } y < 0\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 9\}$
4. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9 \text{ et } y > 0\}$
6. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 \text{ et } y = -2\}$

Correction.

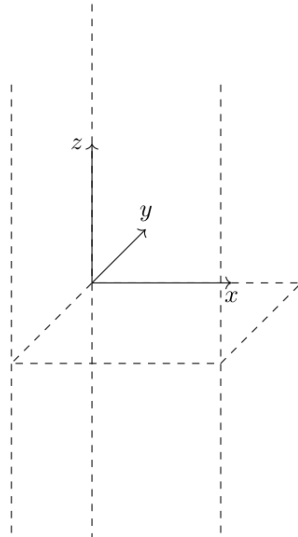
On rappelle les critères suivants pour déterminer si un ensemble est ouvert ou fermé.

- Dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ si la frontière est dans l'ensemble, l'ensemble est fermé, si la frontière n'est pas dedans, l'ensemble est ouvert.
- Un ensemble qui a une dimension plus petite que n ne peut pas être ouvert (un plan dans $\mathbb{R}^3$, une droite dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une courbe etc...). Cela ne veut pas pour autant dire qu'il est fermé (attention !)
- Une condition faisant intervenir $<, >, \neq$ définit une partie ouverte.
- Une condition faisant intervenir $\leq, \geq, =$ définit une partie fermée.
- Un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.
- Un ensemble est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.
- Une union quelconque d'ouverts est ouverte.
- Une union finie de fermés est fermée.
- Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

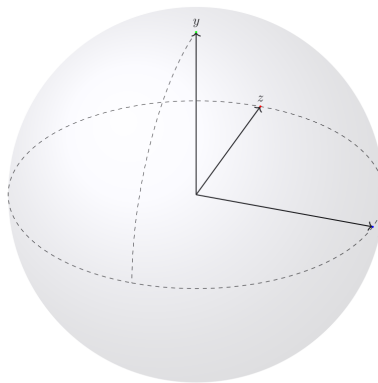
1. L'ensemble E est le plan d'équation $x = 0$. Il est fermé (égalité). $\partial E = E$ Il n'est pas borné.



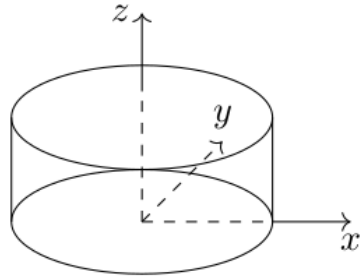
2. L'ensemble E est le volume "parapélépipédique" dont la base est le cadran défini par $x > 0$ et $y < 0$. Il est ouvert, les faces ne font parties de l'ensemble (inégalités strictes) et non borné. Le bord ∂E est composé des faces du volume.



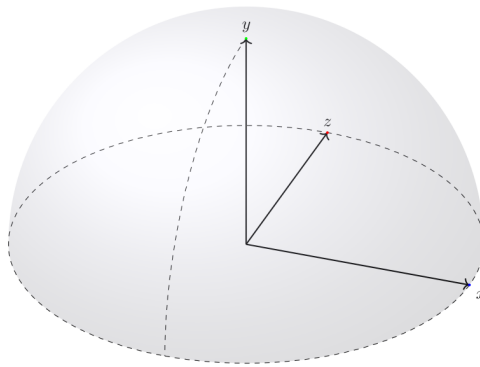
3. L'ensemble E est l'extérieure de la sphère de rayon de 3 (zone en blanc), centrée en l'origine. Son bord et la sphère, qui ne fait partie de l'ensemble (inégalité stricte). Il est donc ouvert. Il est non borné.



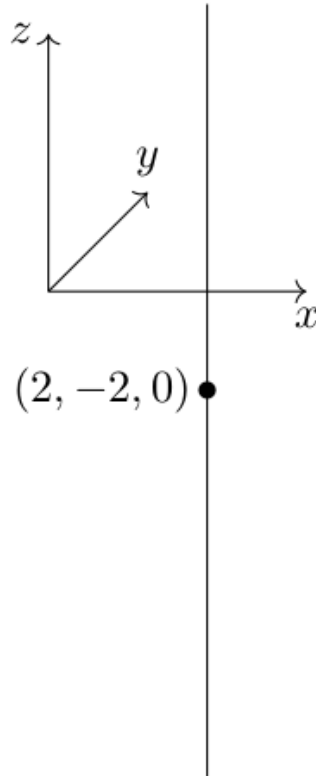
4. L'ensemble E est le cylindre plein de rayon 2 et de hauteur 1. Le bord est cylindre "vide". L'ensemble contient son bord (inégalités larges). Il est donc fermé. Il est borné.



5. L'ensemble E est la demi-sphère de rayon 3, centrée en l'origine. Il ne contient pas son bord (ingéalité stricte). Il est donc ouvert. Il est borné.



6. L'ensemble E est la droite parallèle à l'axe Oz passant par le point $(2, -2, 0)$. Il est fermé. $\partial E = E$. Il est non borné.



Exercice 5. Pièges à éviter

Chacune des propositions ci-dessous est fausse. Le montrer en exhibant un contre-exemple (penser à un ensemble dans $\mathbb{R}^2$ qui ne satisfait pas l'affirmation).

1. Si E est fermé, alors E est borné.
2. Si E est fermé, alors ∂E est borné.
3. Si ∂E est borné, alors E est borné.
4. Si E est ouvert, alors $\partial E \neq \emptyset$

Correction.

1. On peut par exemple choisir le demi-plan $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 1 - x\}$. E est fermé, mais il n'est pas borné (c'est un demi-plan).
2. On peut par exemple choisir le demi-plan $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 1 - x\}$. E est fermé, mais son bord est la droite d'équation $y = 1 - x$, qui n'est pas bornée.

3. On peut par exemple choisir l'extérieur du disque unité $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$. Son bord est le cercle unité (qui est borné), mais l'ensemble E ne l'est pas.
4. On peut prendre $E = \mathbb{R}^2$. Il est ouvert (chaque point de $\mathbb{R}^2$ peut être mis dans une boule ouverte qui reste dans $\mathbb{R}^2$). Mais $\mathbb{R}^2$ n'a pas de bord.

Moralité de l'exercice : attention aux ensembles "infinis", ils ne se comportent pas exactement comme des "patates" (pour lesquelles chacune des affirmations seraient vraies.)

Exercice 6. Et pour finir - Ouvert, fermé, borné, bord, ...

Soient les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

Pour chacun des ensembles décider s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé, s'il est borné ou non, et déterminer le bord. Justifier les réponses à partir des définitions.

Correction.

L'ensemble $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}$ est une couronne (sans les bords) centrée à l'origine, et cet ensemble est ouvert : soit $x \in \Omega_1$ et

$$\delta = \min\{\|x\| - 1, 4 - \|x\|\},$$

alors $B \equiv B(x, \delta) \subset \Omega_1$. Ceci se montre de la manière suivante. Soit $y \in B$, alors par définition de δ on a à la fois $\|x - y\| < \|x\| - 1$ et $\|x - y\| < 4 - \|x\|$. On a donc à la fois

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| < \|x\| + (4 - \|x\|) = 4$$

et

$$\|y\| \geq \|x\| - \|x - y\| > \|x\| - (\|x\| - 1) = 1.$$

On a donc bien que $y \in \Omega_1$.

D'autre part, Ω_1 est borné, car $\forall x \in \Omega_1$, $\|x\| < 4$ et donc $\Omega_1 \subset \overline{B(0, 4)}$. Le bord de Ω_1 est donné par

$$\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 16\}.$$

En effet si $x \in \partial\Omega_1$ on vérifie aisément que quelque soit $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ et que $B(x, \delta) \cap \Omega_1^c \neq \emptyset$.

Ω_2 est la réunion d'une disque ouvert C_1 , centré en $(0, 0)$ de rayon 1, et d'un disque fermé C_2 , centré en $(1, 1)$ de rayon 1. Il s'agit d'un ensemble ni ouvert ni fermé : le point $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur le bord de Ω_2 mais n'appartient pas à Ω_2 et le point $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ n'est pas un point dans Ω_2 . Ω_2 est borné, car contenu dans la boule centrée au point $(0, 0)$ et de rayon 2.5. Le bord de Ω_2 est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 x_2 \leq 0\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_1 \geq 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_2 \geq 1\}.\end{aligned}$$