

Exercice 1. Pour s'échauffer - Limite de suites

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer sa limite, quand celle-ci existe. Sinon, établir si la suite est bornée ou non, et quand elle est bornée, donner une sous-suite convergente.

1. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(\sqrt[k+2]{2}, \frac{k}{k+1} \right)$.
2. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ définie par $x_k = \left(\frac{(-1)^k}{k}, 1 - \frac{1}{k}, 1 \right)$.
3. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right)$.
4. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ définie par $x_k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}, \frac{\ln(k+1)}{k} \right)$.
5. $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \left(k, e^{-k} \right)$.

Exercice 2. Boule unité en norme p

On définit la boule ouverte, en norme p , de rayon R centrée en x_0 dans $\mathbb{R}^n$ par

$$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\|_p < R\}.$$

Représentez $B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$ pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = \infty$.

Exercice 3. Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$

Pour chacun des ensembles ci-dessous, le représenter graphiquement dans le plan Oxy , en indiquant le bord ∂E , puis dire s'il est ouvert ? fermé ? borné ?

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 - x\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\}$
4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ et } y = x^2\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$
6. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 1 \text{ et } 0 < y \leq x^2\}$
7. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < 1 \text{ et } 0 < y < 1 - x^2\}$
8. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$
9. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
10. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$

Exercice 4. Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^3$

Pour chacun des ensembles ci-dessous, le représenter graphiquement dans l'espace $Oxyz$, en indiquant le bord ∂E , puis dire s'il est ouvert ? fermé ? borné ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } y < 0\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 9\}$
4. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9 \text{ et } y > 0\}$
6. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 \text{ et } y = -2\}$

Exercice 5. Pièges à éviter

Chacune des propositions ci-dessous est fausse. Le montrer en exhibant un contre-exemple (penser à un ensemble dans $\mathbb{R}^2$ qui ne satisfait pas l'affirmation).

1. Si E est fermé, alors E est borné.
2. Si E est fermé, alors ∂E est borné.
3. Si ∂E est borné, alors E est borné.
4. Si E est ouvert, alors $\partial E \neq \emptyset$

Exercice 6. Et pour finir - Ouvert, fermé, borné, bord, ...

Soient les ensembles suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\},$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leq 1\}.$$

Pour chacun des ensembles décider s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé, s'il est borné ou non, et déterminer le bord. Justifier les réponses à partir des définitions.

Réponses

Exercice 1.

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (1, 1)$.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (0, 1, 1)$.
3. La suite ne converge pas, mais est bornée. $x_{4k} = (1, 0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (1, 0)$.
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (0, 0, 0)$.
5. La première composante diverge, donc la suite ne converge pas, et n'est pas bornée.

Exercice 3.

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Ouvert, borné. | 6. Ni ouvert, ni fermé, ni borné. |
| 2. Fermé, non borné. | 7. Ouvert, borné. |
| 3. Fermé, borné. | 8. Fermé, non borné. |
| 4. Ni ouvert, ni fermé, borné. | 9. Fermé, borné. |
| 5. Fermé, borné. | 10. Ni ouvert, ni fermé, borné. |

Exercice 4.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1. Fermé, non borné. | 4. Fermé, borné. |
| 2. Ouvert, non borné. | 5. Ouvert, borné. |
| 3. Ouvert, non borné. | 6. Fermé, non borné. |

Exercice 6.

1. Ouvert, borné, $\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 16\}$.
2. Ni ouvert ni fermé, borné,

$$\begin{aligned}\partial\Omega_2 = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_1 \geq 1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_2 \geq 1\}.\end{aligned}$$