Exercice 1. Pour s'échauffer - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Il existe de nombreuses preuves de cette inégalité, nous allons en voir une : pour deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^n$ soit la fonction

$$P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle.$$

a) Développer l'expression $P(\lambda)$ en utilisant les propriétés du produit scalaire. Vérifier qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2.

b) On a que $P(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Pourquoi ?

c) Calculer le discriminant Δ de P et utiliser le point (2) pour conclure que $\Delta \leq 0$.

d) Conclure.

Correction.

a) On a
$$P(\lambda) = \lambda^2\|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle\lambda + \|x\|^2.$$

b) On a $P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x + \lambda y\|^2 \geq 0, \forall \lambda$.

c) On a
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2.$$
Or comme $P(\lambda)$ est toujours positif ou nul, nécessairement on doit avoir $\Delta \leq 0$.

d) Par conséquent, on a
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$
d'où
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Exercice 2. Équivalence des normes

Soit $\|\cdot\|_p$ pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ la $p-$norme définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$
$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad 1 < p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

b) En déduire que toutes les $p-$normes sont équivalentes, i.e. pour tout $p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, il existe $c, C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad c\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C\|x\|_q.$$

Correction.

- D'une part, $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |x_j|$ pour un certain $j \in [1, n]$. On a

$$\|x\|_\infty^p = \left(\max_{i=1,\dots,n} |x_i|\right)^p = |x_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p,$$

d'où $\|x\|_\infty \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \|x\|_p$. D'autre part,

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^n \left(\max_{k=1,\dots,n} |x_k|\right)^p = n\|x\|_\infty^p,$$

d'où $\|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty$.

- Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$. Le cas où p ou q vaut ∞ a été traité dans la question précédente. On compare chaque norme à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a

$$\|x\|_q \leq \sqrt[q]{n}\|x\|_\infty \leq \sqrt[q]{n}\|x\|_p \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[q]{n}}\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

On peut donc poser $c = 1/\sqrt[q]{n}$. De plus,

$$\|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_q,$$

et on peut prendre $C = \sqrt[p]{n}$.

Exercice 3. Suite bornée

Soit $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente. Montrer que $(x_k)_{k=0}^\infty$ est bornée.

Remarque : on prendra la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ mais, par équivalence des normes, ce résultat est indépendent de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

Comme $(x_k)_{k=0}^\infty$ converge, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \text{tel que } k \geq K \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

Sans perte de généralité, posons $\varepsilon = 1$. Il existe alors $K_1 \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq K_1$,

$$\|x_k - x\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| - 1 \leq \|x_k\| \leq 1 + \|x\|.$$

De plus, pout tout $k < K_1$, $\|x_k\| \leq \max_{i=0,\dots,K_1} \|x_i\| = M$. On pose alors $C = \max(1 + \|x\|, M)$ et on a bien, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x_k\| \leq C$.

Exercice 4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ une suite bornée. Montrer qu'il existe $(x_{k_j})_{j=0}^\infty \subset (x_k)_{k=0}^\infty$ telle que $(x_{k_j})_{j=0}^\infty$ converge.

Remarque :

- On choisira la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ sans perte de généralité sur le résultat.
- Le résultat se généralise à $\mathbb{R}^n$, pour tout $n > 2$.

Correction.
Soit $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$. Comme $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est bornée, il existe $C > 0$ telle que

$$\|x_k\| \leq C, \quad \forall k \geq 0.$$

Ainsi, pour $i = 1, 2$, $|x_{k,i}| \leq \sqrt{|x_{k,1}|^2 + |x_{k,2}|^2} = \|x_k\| \leq C$. On en déduit que $(x_{k,1})_{k=0}^{\infty}$ est une suite réelle bornée. En appliquant le théore de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles, on déduit qu'il existe une sous-suite convergence $(x_{k_j,1})_{j=0}^{\infty} \subset (x_{k,1})_{k=0}^{\infty}$.
En choisissant alors $(x_{k_j,2})_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ comme sous-suite de $(x_{k,2})_{k=0}^{\infty}$, on a par le même argument que $(x_{k_j,2})_{j=0}^{\infty}$ est bornée, donc il existe une sous-sous-suite $(x_{k_{j_l},2})_{l=0}^{\infty} \subset (x_{k_j,2})_{j=0}^{\infty}$ qui converge.
Or, comme $(x_{k_j,1})_{j=0}^{\infty}$ converge, $(x_{k_{j_l},1})_{l=0}^{\infty}$ converge car toute sous-suite d'une suite convergente est convergente. Finalement, on a que $(x_{k_{j_l}})_{l=0}^{\infty} = ((x_{k_{j_l},1}, x_{k_{j_l},2}))_{l=0}^{\infty} \subset (x_k)_{k=0}^{\infty}$ est une sous-suite convergente.

Exercice 5. Complétude de $\mathbb{R}^n$
Montrer que $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ converge si et seulement si $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est de Cauchy.

Remarque :

- On choisira la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ sans perte de généralité sur le résultat.
- $\mathbb{R}^n$, muni de n'importe quelle norme, est donc un espace dit complet ou de Banach.

Correction.
" $\Rightarrow$ " Supposons que $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ converge, il existe alors $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } k \geq K(\varepsilon) \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $K(\varepsilon/2)$ tel que $\|x_k - x\| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geq K(\varepsilon/2)$. Par conséquent, par l'inégalité triangulaire, pour tout $k, l \geq K(\varepsilon/2)$, on a

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x\| + \|x_l - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est de Cauchy, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \text{tel que } k, l \geq K \Rightarrow \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon.$$

Étape 1 : On montre pour commencer que $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est bornée. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k, l \geq K$,

$$\|x_k - x_l\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\|x_k\| \leq \|x_k - x_K\| + \|x_K\| \leq \varepsilon + \|x_K\|.$$

De plus, $\forall k < K, \|x_k\| \leq \max_{i=1,\ldots,K} \|x_i\| = M$. En posant $C = \max(M, \|x_K\| + \varepsilon)$, on a bien

$$\|x_k\| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Étape 2 : On applique le théorème de Bolzano-Weierstrass. Puisque $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ est bornée, il existe une sous-suite $(x_{k_l})_{l=0}^{\infty} \subset (x_k)_{k=0}^{\infty}$ qui converge. Notons $x \in \mathbb{R}^n$ sa limite. On a $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = x$.

Étape 3 : Finalement, montrons que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est de Cauchy, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon/2, \quad \forall k, j \geq K.$$

De plus, puisque (x_{k_l}) converge vers x, il existe $L_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_{k_l} - x\| < \varepsilon/2, \quad \forall l \geq L_1.$$

Finalement, comme $\lim_{l\to\infty} k_l = \infty$, il existe $L_2 \in \mathbb{N}$ tel que $k_l \geq K$, pour tout $l \geq L_2$. Posons $L = \max(L_1, L_2)$. On a alors, pour tout $k \geq K$,

$$\|x_k - x\| \leq \|x_k - x_{k_L}\| + \|x_{k_L} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercice 6. Et pour finir - Suite et série géométrique dans $\mathbb{R}^n$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ on définit sa norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$ par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante. Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}.$$

Remarque : La quantité $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On retrouve donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans son écriture standard

$$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\|_F\|B\|_F.$$

b) Montrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, c'est à dire

   (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \|A\|_F \geq 0$ et $\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow A = O_{n\times n}$ (positivité).
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda A\|_F = |\lambda| \cdot \|A\|_F$ (homogénéité absolue).
   (c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$ (inégalité triangulaire).

c) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$.

d) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \|f_A(x)\|_2 \leq \|A\|_F\|x\|_2$, où $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire dont A est la représentation matricielle en base canonique.

e) Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la suite $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ définie par récurrence comme

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_A(x_k), k \in \mathbb{N}, \\ x_0 = x. \end{cases}$$

Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors $\lim_{k\to\infty} x_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Conclure que $\lim_{k\to\infty} f_A^{(k)}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ où $f_A^{(k)} = \underbrace{f_A \circ \cdots \circ f_A}_{k \text{ fois}}$.

f) Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors 1 n'est pas une valeur propre de A. En déduire que sous cette condition, l'application linéaire $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A$ est inversible, où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité.

g) On considère de nouveau la suite $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ définie au point 5. Soit $(y_l)_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad y_l = \sum_{k=0}^{l} x_k.$$

Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors

$$\lim_{l\to\infty} y_l = \sum_{k=0}^{\infty} x_k = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A\right)^{-1}(x).$$

<u>Indication :</u> Calculer, pour $l \in \mathbb{N}$,

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + f_A^{(2)} + \cdots + f_A^{(l)}\right) \circ \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A\right).$$

Correction.

a) En observant que les coefficients des matrices A et B peuvent se ranger dans des vecteurs de tailles $n \times n$, on a immédiatement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n\times n} \tilde{a}_k\tilde{b}_k\right| = |\langle \tilde{a}, \tilde{b}\rangle| \le \|\tilde{a}\|_2\|\tilde{b}\|_2 = \|A\|_F\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2},$$

où $\tilde{a}, \tilde{b}$ sont les vecteurs de taille $n \times n$ construits en découpant A et B lignes par lignes.

b) (a) Comme $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ on a nécessairement $\|A\|_F \ge 0$ et

$$\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow A = O_{n\times n}.$$

(b) On a

$$\|\lambda A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda a_{ij})^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = |\lambda| \cdot \|A\|_F.$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_F^2 &= \sum_{i,j}^{n} (a_{ij} + b_{ij})^2 \\
&= \sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2 + 2\sum_{i,j}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{i,j}^{n} b_{ij}^2 \\
&\le \sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2 + 2\sqrt{\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j}^{n} b_{ij}^2} + \sum_{i,j}^{n} b_{ij}^2 \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2} + \sqrt{\sum_{i,j}^{n} b_{ij}^2}\right)^2 \\
&= (\|A\|_F + \|B\|_F)^2.
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} (AB)_{ij}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1} b_{kj}^2 \right) \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right) \\
&= \|A\|_F^2 \|B\|_F^2.
\end{aligned}
$$

d) En base canonique, les coefficients de $f_A(x)$ sont donnés par $(f_A(x))_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, d'où

$$
\|f_A(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_A(x))_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 .
$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$
\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2.
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\|f_A(x)\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&= \|A\|_F^2 \|x\|_2^2.
\end{aligned}
$$

e) Montrons que $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$, ce qui impliquera que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Comme $x_{k+1} = f_A(x_k)$, on a

$$
\|x_k\| = \|f_A(x_{k-1})\| \leq \|A\|_F \|x_{k-1}\| \leq \cdots \leq \|A\|_F^k \|x_0\| = \|A\|_F^k \|x\|.
$$

Comme $\|A\|_F < 1$, on a $\lim_{k\to\infty} \|A\|_F^k = 0$, d'où $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$. Finalement, on a $x_k = f_A(x_{k-1}) = \cdots = f_A^{(k)}(x)$, d'où $\lim_{k\to\infty} f_A^{(k)}(x) = 0$.

f) Par l'absurde, supposons que 1 est une valeur propre de A. Soit $v_1 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. D'une part,

$$
\|Av_1\|_2 = \|1 \cdot v_1\|_2 = \|v_1\|_2,
$$

et d'autre part,

$$
\|Av_1\|_2 \leq \|A\|_F \|v_1\|_2 < \|v_1\|_2 \text{ car } \|A\|_F < 1.
$$

On obtient ainsi $\|v_1\|_2 < \|v_1\|_2$, ce qui est contradictoire. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A$ est alors inversible car 1 n'étant pas valeur propre de A, on a pas définition $\det(I_n - A) \neq 0$.

g) Observons que $x_k = f_A(x_{k-1}) = \cdots = f_A^{(k)}(x_0) = f_A^{(k)}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_l &= x_0 + x_1 + \cdots + x_l \\ &= x + f_A(x) + \cdots + f_A^{(l)}(x) \\ &= \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + \cdots + f_A^{(l)}\right)(x). \end{aligned}$$

On utilise l'indication.

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + f_A^{(2)} + \cdots + f_A^{(l)}\right) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A^{(l+1)} \\ \Rightarrow &\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + f_A^{(2)} + \cdots + f_A^{(l)}\right) = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A^{(l+1)}\right) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} y_l &= \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A^{(l+1)}\right) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x) - f_A^{(l+1)}\left((\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x)\right). \end{aligned}$$

Or, en appliquant le résultat du point 5., on a que $\forall y \in \mathbb{R}^n, f_A^{(l+1)}(y) \to 0$ si $l \to \infty$. D'où finalement

$$\lim_{l\to\infty} y_l = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x).$$