

**Exercice 1. Pour s'échauffer - Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Il existe de nombreuses preuves de cette inégalité, nous allons en voir une : pour deux éléments  $x, y \in \mathbb{R}^n$  soit la fonction

$$P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle.$$

- Développer l'expression  $P(\lambda)$  en utilisant les propriétés du produit scalaire. Vérifier qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2.
- On a que  $P(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Pourquoi ?
- Calculer le discriminant  $\Delta$  de  $P$  et utiliser le point (2) pour conclure que  $\Delta \leq 0$ .
- Conclure.

**Exercice 2. Équivalence des normes**

Soit  $\|\cdot\|_p$  pour  $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  la  $p$ -norme définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  par

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad 1 < p < \infty, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|. \end{aligned}$$

- Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- En déduire que toutes les  $p$ -normes sont équivalentes, i.e. pour tout  $p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , il existe  $c, C > 0$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad c \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C \|x\|_q.$$

**Exercice 3. Suite bornée**

Soit  $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  une suite convergente. Montrer que  $(x_k)_{k=0}^\infty$  est bornée.

Remarque : on prendra la norme  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  mais, par équivalence des normes, ce résultat est indépendant de la norme choisie sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 4. Théorème de Bolzano-Weierstrass**

Soit  $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$  une suite bornée. Montrer qu'il existe  $(x_{k_j})_{j=0}^\infty \subset (x_k)_{k=0}^\infty$  telle que  $(x_{k_j})_{j=0}^\infty$  converge.

Remarque :

- On choisira la norme  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$  sans perte de généralité sur le résultat.
- Le résultat se généralise à  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $n > 2$ .

**Exercice 5. Complétude de  $\mathbb{R}^n$**

Montrer que  $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  converge si et seulement si  $(x_k)_{k=0}^\infty$  est de Cauchy.

Remarque :

- On choisira la norme  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$  sans perte de généralité sur le résultat.
- $\mathbb{R}^n$ , muni de n'importe quelle norme, est donc un espace dit complet ou de Banach.

**Exercice 6. Et pour finir - Suite et série géométrique dans  $\mathbb{R}^n$**

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  avec  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  on définit sa norme de Frobenius  $\| \cdot \|_F$  par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

- a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  avec  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  et  $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ,

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2}.$$

Remarque : La quantité  $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On retrouve donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans son écriture standard

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

- b) Montrer que  $\| \cdot \|_F$  est une norme sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , c'est à dire
- (a)  $\forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|A\|_F \geq 0$  et  $\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow A = O_{n \times n}$  (positivité).
  - (b)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda A\|_F = |\lambda| \cdot \|A\|_F$  (homogénéité absolue).
  - (c)  $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$  (inégalité triangulaire).
- c) Montrer que  $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ .
- d) Montrer que  $\forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \|f_A(x)\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$ , où  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'application linéaire dont  $A$  est la représentation matricielle en base canonique.
- e) Soit  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on considère la suite  $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  définie par récurrence comme

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_A(x_k), k \in \mathbb{N}, \\ x_0 = x. \end{cases}$$

Montrer que si  $\|A\|_F < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Conclure que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_A^{(k)}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$  où  $f_A^{(k)} = \underbrace{f_A \circ \dots \circ f_A}_{k \text{ fois}}$ .

- f) Montrer que si  $\|A\|_F < 1$ , alors 1 n'est pas une valeur propre de  $A$ . En déduire que sous cette condition, l'application linéaire  $\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A$  est inversible, où  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  désigne l'application identité.
- g) On considère de nouveau la suite  $(x_k)_{k=0}^\infty$  définie au point 5. Soit  $(y_l)_{l=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad y_l = \sum_{k=0}^l x_k.$$

Montrer que si  $\|A\|_F < 1$ , alors

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_l = \sum_{k=0}^{\infty} x_k = (\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x).$$

Indication : Calculer, pour  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( \text{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + f_A^{(2)} + \cdots + f_A^{(l)} \right) \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A).$$