

Exercice 1. Pour s'échauffer - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Il existe de nombreuses preuves de cette inégalité, nous allons en voir une : pour deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^n$ soit la fonction

$$P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle.$$

1. Développer l'expression $P(\lambda)$ en utilisant les propriétés du produit scalaire. Vérifier qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2.
2. On a que $P(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Pourquoi ?
3. Calculer le discriminant Δ de P et utiliser le point (2) pour conclure que $\Delta \leq 0$.
4. Conclure.

Exercice 2. Équivalence des normes

Soit $\|\cdot\|_p$ pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ la p -norme définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad 1 < p < \infty, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|. \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. En déduire que toutes les p -normes sont équivalentes, i.e. pour tout $p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, il existe $c, C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad c \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C \|x\|_q.$$

Exercice 3. Suite bornée

Soit $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente. Montrer que $(x_k)_{k=0}^\infty$ est bornée.

Remarque : on prendra la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ mais, par équivalence des normes, ce résultat est indépendant de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ une suite bornée. Montrer qu'il existe $(x_{k_j})_{j=0}^\infty \subset (x_k)_{k=0}^\infty$ telle que $(x_{k_j})_{j=0}^\infty$ converge.

Remarque :

- On choisira la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ sans perte de généralité sur le résultat.
- Le résultat se généralise à $\mathbb{R}^n$, pour tout $n > 2$.

Exercice 5. Complétude de $\mathbb{R}^n$

Montrer que $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ converge si et seulement si $(x_k)_{k=0}^\infty$ est de Cauchy.

Remarque :

- On choisira la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ sans perte de généralité sur le résultat.
- $\mathbb{R}^n$, muni de n'importe quelle norme, est donc un espace dit complet ou de Banach.

Exercice 6. Et pour finir - Suite et série géométrique dans $\mathbb{R}^n$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ on définit sa norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$ par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$,

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2}.$$

Remarque : La quantité $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On retrouve donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans son écriture standard

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

2. Montrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, c'est à dire
 - (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|A\|_F \geq 0$ et $\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow A = O_{n \times n}$ (positivité).
 - (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda A\|_F = |\lambda| \cdot \|A\|_F$ (homogénéité absolue).
 - (c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$ (inégalité triangulaire).
3. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.
4. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \|f_A(x)\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$, où $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire dont A est la représentation matricielle en base canonique.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la suite $(x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ définie par récurrence comme

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_A(x_k), k \in \mathbb{N}, \\ x_0 = x. \end{cases}$$

Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Conclure que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_A^{(k)}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ où $f_A^{(k)} = \underbrace{f_A \circ \dots \circ f_A}_{k \text{ fois}}$.

6. Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors 1 n'est pas une valeur propre de A . En déduire que sous cette condition, l'application linéaire $\text{id}_{\mathbb{R}^n} - A$ est inversible, où $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité.
7. On considère de nouveau la suite $(x_k)_{k=0}^\infty$ définie au point 5. Soit $(y_l)_{l=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad y_l = \sum_{k=0}^l x_k.$$

Montrer que si $\|A\|_F < 1$, alors

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_l = \sum_{k=0}^{\infty} x_k = (\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A)^{-1}(x).$$

Indication : Calculer, pour $l \in \mathbb{N}$,

$$\left(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f_A + f_A^{(2)} + \cdots + f_A^{(l)} \right) \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f_A).$$