



1

Ens. : O. Lévêque, M. Stojilović
Information, Calcul, Communication - A
Vendredi 19 décembre 2025
Durée : 180 minutes

Solutions

SCIPER : 0

Salle : INF 1

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 5 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

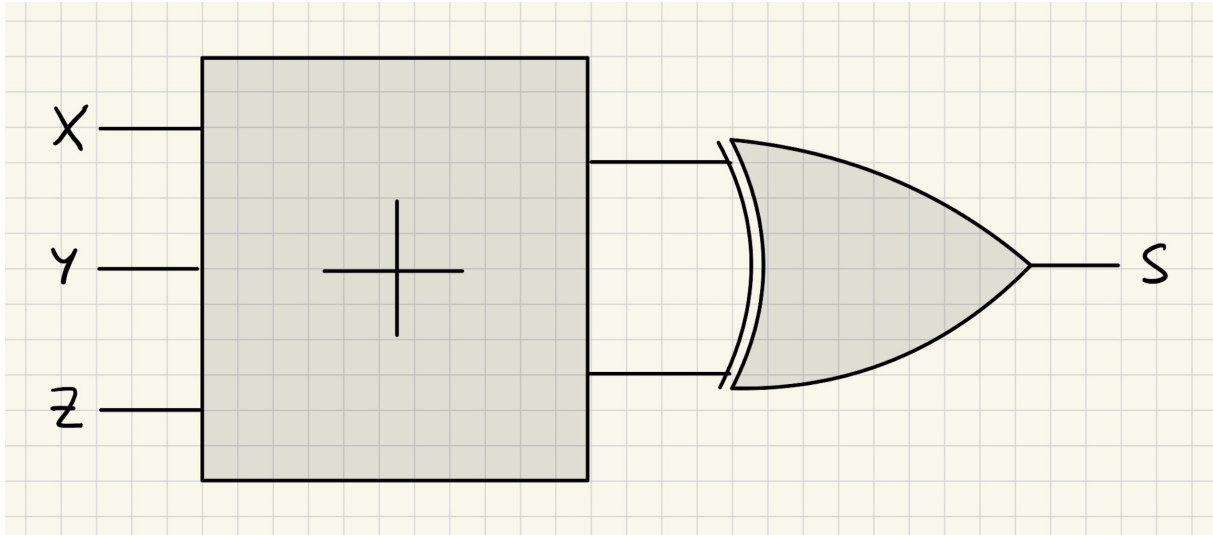
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Document autorisé pour cet examen : un formulaire constitué de deux pages A4 recto-verso, manuscrites, préparées avec stylet+tablette ou à l'ordinateur.
- Seule l'utilisation d'une calculatrice simple (de type TI-30 eco RS) est autorisée pendant l'examen. Tout autre appareil électronique (ordinateur, smartphone/watch, tablette) est interdit.
- L'examen est composé uniquement de questions de type ouvert, valant en tout 40 points.
- Merci d'avance de soigner la présentation de vos réponses !
- Laissez libres les cases à cocher : elles sont réservées aux correcteurs.
- Si une question est erronée, les enseignants se réservent le droit de l'annuler.



Question 1: Cette question est notée sur 5 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

On considère le circuit suivant :



où le premier circuit à gauche est l'additionneur de 3 bits utilisé comme “brique de base” dans l'additionneur de nombres entiers vu au cours.

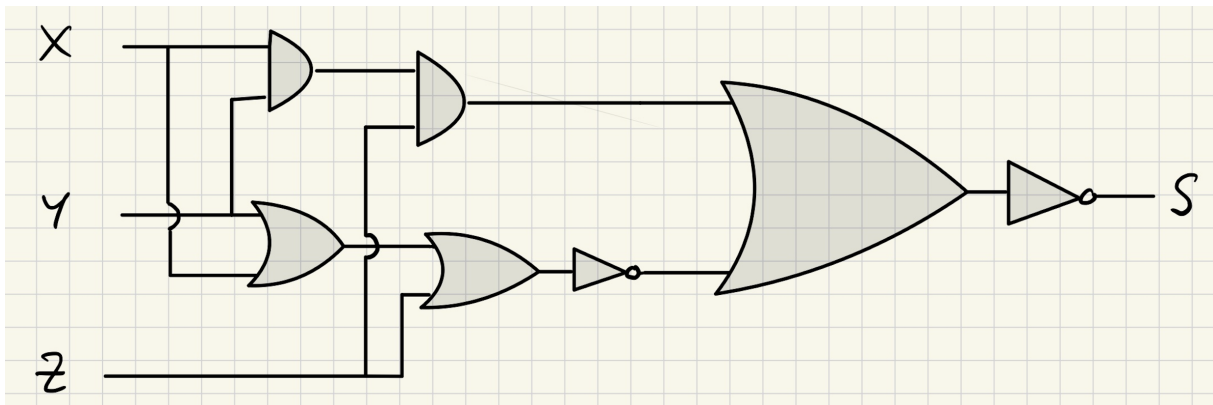
a) (2 points) Pour quelles valeurs de X, Y, Z en entrée la sortie S du circuit ci-dessus vaut-elle 0 ?

Réponse : La sortie S vaut 0 lorsque $X = Y = Z = 0$ ou $X = Y = Z = 1$.

b) (3 points) Proposez un circuit alternatif composé uniquement de portes ET, OU et NON, dont la sortie S soit identique à celle du circuit de la page ci-contre (pour les mêmes entrées X, Y, Z).

Votre circuit ne doit pas comporter plus de 7 portes au total.

Réponse :





Question 2: Cette question est notée sur 5 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅

Soit $n \geq 1$ un nombre entier positif. On considère le signal suivant :

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \sin(2^k \pi t)$$

où le temps t est mesuré en secondes.

a) (1 point) Que vaut la bande passante du signal X ? (exprimée en Hertz)

Réponse : La bande passante vaut 2^{n-1} Hertz

Le signal X est filtré avec un filtre à moyenne mobile de période d'intégration $T_c = 2^{-k_0}$ seconde, où k_0 est un nombre entier compris entre 1 et n (inclus).

b) (2 points) Que vaut le signal $\hat{X}$ à la sortie du filtre et combien de composantes de ce signal ont-elles une amplitude non-nulle ?

Réponse : L'amplitude de sortie d'une sinusoïde $\sin(2\pi f t)$ passant à travers un filtre à moyenne mobile de période T_c vaut

$$\left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right|$$

Si donc $f_k = 2^{k-1}$ et $T_c = 2^{-k_0}$, l'amplitude de sortie vaudra

$$\left| \frac{\sin(\pi 2^{k-1-k_0})}{\pi 2^{k-1-k_0}} \right| \quad \text{qui est nulle si } k \geq k_0 + 1$$

Seules les k_0 composantes de fréquences $f_k = 2^{k-1}$ avec $k \leq k_0$ sortent donc avec une amplitude non-nulle et

$$\hat{X}(t) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\sin(\pi 2^{k-1-k_0})}{\pi 2^{k-1-k_0}} \sin(2^k \pi t - \pi 2^{k-1-k_0})$$

c) (2 points) Supposons maintenant qu'on échantillonne le signal filtré $\hat{X}$ à une fréquence f_e comprise strictement entre 2^{k_0} et 2^{k_0+1} Hertz et qu'on reconstruit ensuite celui-ci grâce à la formule d'interpolation vue en cours.

Le signal reconstruit sera-t-il identique au signal d'origine X , au signal filtré $\hat{X}$, ou différent de ces deux signaux ? Justifiez pleinement votre réponse.

Réponse : Le signal reconstruit sera identique au signal filtré $\hat{X}$. En effet, comme vu dans la partie b), la bande passante de celui-ci vaut 2^{k_0-1} , donc si $2^{k_0} < f_e < 2^{k_0+1}$, la condition de Nyquist est respectée et il n'y aura pas d'effet stroboscopique lors de la reconstruction.



Question 3: Cette question est notée sur 5 points.

0 1 2 3 4 5

a) (2 points) Proposez un encodage binaire pour la séquence de 16 chiffres

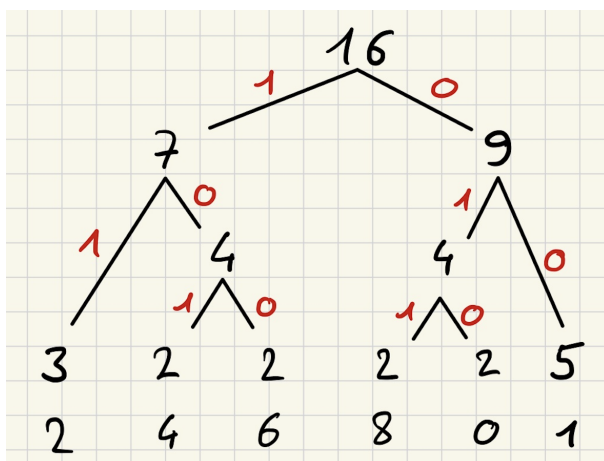
2 4 6 8 1 0 1 2 1 4 1 6 1 8 2 0

qui respecte les trois conditions suivantes :

- à chaque chiffre correspond un unique mot de code ;
- la séquence binaire ainsi produite doit être décodable de manière univoque ;
- le nombre total de bits utilisés doit être minimal ;

et dessinez également l'arbre binaire que vous utilisez pour l'encodage.

Réponse : Voici l'arbre de Huffman pour l'encodage (une possibilité) :



ainsi que l'encodage (sans préfixe) qui en résulte : 2 : 11, 4 : 101, 6 : 100, 8 : 011, 0 : 010, 1 : 00

b) (2 points) Exprimez l'entropie de la séquence de chiffres sous la forme $H = a + b \log_2(3) + c \log_2(5)$, où a, b, c sont des nombres rationnels, puis calculez sa valeur numérique. Votre résultat est-il cohérent avec la partie a) ?

Réponse : Le calcul de l'entropie donne $H = \frac{7}{2} - \frac{3}{16} \log_2(3) - \frac{5}{16} \log_2(5) \simeq 2,48$. Ce calcul est cohérent avec la partie a) qui donne un encodage utilisant $\frac{40}{16} = 2,5$ bits/chiffre, nombre plus grand que l'entropie de la séquence, conformément au théorème de Shannon.

c) (1 point) On propose maintenant d'encoder la séquence avec le dictionnaire suivant :

2 : 10, 4 : 100, 6 : 110, 8 : 1000, 10 : 1010, 12 : 1100, 14 : 1110, 16 : 10000, 18 : 10010, 20 : 10100

(où on encode donc certains chiffres par groupes de deux plutôt qu'isolément).

Ce système d'encodage est-il meilleur ou moins bon que celui que vous avez proposé plus haut ? Justifiez votre réponse.

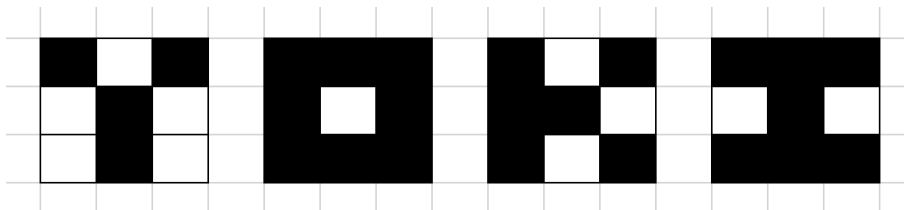
Réponse : Cet encodage n'utilise que 39 bits en tout, et non 40; il est cependant moins bon que le précédent, car certains mots de code sont les préfixes d'autres, ce qui porte à confusion lors du décodage.



Question 4: Cette question est notée sur 5 points.

0 1 2 3 4 5

Pour transmettre le message “YOKI” composé de 4 lettres, on utilise pour chaque lettre une grille de 3×3 pixels noirs et blancs :



et on suppose qu’on n’utilise que ces 4 lettres pour la transmission.

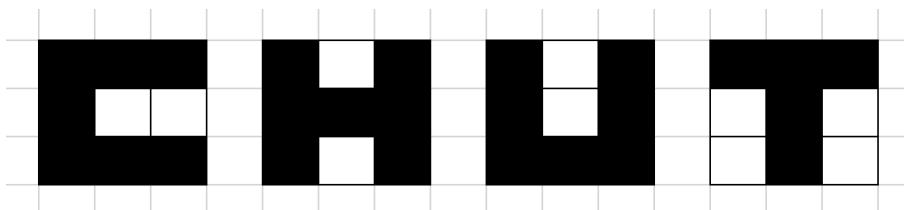
a) (2 points) Supposons que lors de la transmission, certains pixels soient effacés (on peut imaginer ces pixels devenant gris, par exemple). Jusqu’à combien d’effacements par lettre, dans le pire des cas, le décodage du message est-il toujours possible sans ambiguïté ? Justifiez votre réponse.

Réponse : La distance minimale entre deux images vaut $d = 3$. Il est donc possible de corriger 2 effacements.

b) (1 point) Si maintenant ce ne sont pas des effacements qui surviennent lors de la transmission, mais des erreurs du type : un pixel noir devient blanc, ou l’inverse. Jusqu’à combien d’erreurs par lettre, dans le pire des cas, le décodage du message est-il toujours possible sans ambiguïté ? A nouveau, justifiez votre réponse.

Réponse : Vu que $d = 3$, il n’est possible de corriger qu’une erreur.

c) (2 points) Finalement, si au lieu du message “YOKI”, c’est le message “CHUT” qui est transmis :



et on suppose à nouveau qu’on n’utilise que ces 4 lettres pour la transmission.

Comment les réponses aux questions a) et b) seront-elles modifiées dans ce cas ?

Réponse : Ici, la distance minimale entre deux images vaut $d = 2$, donc il n’est possible de corriger qu’un effacement et aucune erreur.