Exercice 1. Grâce à cette inégalité, on a $\frac{n^2}{2^n} \le \frac{24n^2}{n^3} = \frac{24}{n}$ (pour n entier et $n \ge 4$). Nous avons vu au cours que la suite $1/n$ tend vers 0 et la proposition sur le produit de limites nous dit que la suite $24 \cdot 1/n$ tend vers $24 \cdot 0 = 0$. Comme $0 \le \frac{n^2}{2^n} \le \frac{24}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que la suite $(\frac{n^2}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ avec $|\frac{n^2}{2^n} - 0| = \frac{n^2}{2^n} \le \frac{24}{n} = |\frac{24}{n} - 0| < \varepsilon$ pour tout $n \ge N$.

Exercice 2.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Par le cours, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si on démontre que $\frac{2}{3^N} \le \frac{1}{N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on aura gagné.
Montrons donc par récurrence que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $2N \le 3^N$ (en multipliant chaque côté de cette inégalité par $\frac{1}{N \cdot 3^N}$, on obtient bien $\frac{2}{3^N} \le \frac{1}{N}$). L'initialisation est vraie puisque $2 \cdot 1 = 2 \le 3 = 3^1$. Pour l'hérédité, on écrit

$$2(N+1) \overset{1\le N}{\le} 2(N+N) = 2 \cdot 2N \le 3 \cdot 2N \overset{\text{hyp.}}{\le} 3 \cdot 3^N = 3^{N+1}.$$

La récurrence est complète, et l'affirmation demandée est démontrée.

b) Remarquons que $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4}{3} = \dfrac{x_n}{3} + \dfrac{4}{3}$. Ainsi x_n est positif quelque soit n, et de plus si la limite existe, alors elle sera plus grande ou égale à $\dfrac{4}{3}$. En faisant tendre n vers l'infini dans la relation de récurrence et en observant les règles d'addition et de multiplication des limites, on a qu'un candidat x à la limite doit satisfaire l'équation

$$x = \frac{x+4}{3},$$

dont la seule solution est $x = 2$. Montrons que c'est bien la limite de la suite ; pour ceci, estimons la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left| \frac{x_n + 4}{3} - \frac{x+4}{3} \right| = \left| \frac{x_n - x}{3} \right|.$$

En itérant ce procédé, on obtient $|x_{n+1} - x| = \dfrac{|x_0 - x|}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3^{n+1}}$, soit encore $|x_n - x| = \dfrac{2}{3^n}$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par la partie **a)** de cette exercice, il existe un entier N tel que $\dfrac{2}{3^N} < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$|x_n - x| = \frac{2}{3^n} \le \frac{2}{3^N} < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \ge N$$

ce qui montre bien que la suite x_n tend vers 2.

Exercice 3. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on doit avoir que la limite, si elle existe, vérifie $x = \sqrt{1+x}$, donc $x^2 = 1 + x$, soit encore $x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi les candidats potentiels sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; comme tous les termes x_n sont positifs, on peut écarter la solution négative, et le seul candidat restant est $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que ce x est bien la limite de la suite en estimant la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left|\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+x}\right| = \left| \frac{(1+x_n) - (1+x)}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x}} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x_{n+1} + x} \right| < \frac{|x_n - x|}{2}$$

où on a utilisé dans la deuxième égalité la multiplication par $\frac{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}$ et une identité remarquable pour enlever les racines, et dans la dernière inégalité on a utilisé le fait que x_n et x sont plus grands que $x_1 = 1$. En itérant ce procédé, on trouve finalement

$$|x_{n+1} - x| < \frac{|x_0 - x|}{2^{n+1}} < \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{soit encore} \qquad |x_n - x| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Continuons de raisonner comme à l'exercice précédent, et montrons par récurrence que $N \le 2^{N-1}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation suit de $1 \le 1 = 2^{1-1}$, et l'hérédité de

$$N + 1 \overset{1\le N}{\le} N + N \overset{\text{hyp.}}{\le} 2^{N-1} + 2^{N-1} = 2 \cdot 2^{N-1} = 2^N$$

ce qui conclut la récurrence. On en déduit que $\frac{1}{2^{N-1}} \le \frac{1}{N}$ pour tout entier N positif.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par le cours, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, et par ce qui précède,

$$|x_n - x| < \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$

La suite (x_n) converge donc bien vers $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4.

a) Calculons d'abord $x_{n+2} = \dfrac{1}{1+x_{n+1}} = \dfrac{1+x_n}{2+x_n}$, et effectuons une étude de signe de $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{2x+4}$ (dont la VI est $x = -2$ et le zéro $x = 0$).

TDS :

		-2		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Ce tableau montre que si $x_n \geq 0$, alors $f(x_n) \geq 0$, c'est-à-dire $x_{n+2} \geq \frac{1}{2}$. Avec cette observation, il faut effectuer deux récurrences : une pour les indices impairs, et une pour les pairs :

- **Indices impairs.** Pour l'initialisation, $x_1 = 1$ est bien plus grand ou égal à $\frac{1}{2}$. Pour l'hérédité, si $x_n \geq \frac{1}{2}$, alors $x_n \geq 0$ (!) et on a montré ci-dessus qu'il suit $x_{n+2} \geq \frac{1}{2}$.
- **Indices pairs.** Pour l'initialisation, on calcule $x_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, qui est bien plus grand ou égal à $\frac{1}{2}$. Pour l'hérédité, on procède comme au cas précédent : si $x_n \geq \frac{1}{2}$, alors $x_n \geq 0$ et donc $x_{n+2} \geq \frac{1}{2}$.

Ces deux récurrences montrent qu'on a bien $x_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

b) Comme dans les deux exercices précédents, la limite x, si elle existe, vérifie $x = \frac{1}{1+x}$, c'est-à-dire qu'elle est solution de $x^2 + x - 1 = 0$. Les candidats potentiels sont donc $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; comme tous les termes x_n sont positifs (et même plus grand ou égaux à $\frac{1}{2}$), on peut écarter la solution négative et donc le seul candidat est $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que ce x est bien la limite de la suite en estimant la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{(1+x)-(1+x_n)}{(1+x_n)(1+x)}\right| = \frac{|x_n - x|}{(1+x_n)(1+x)} < \frac{4}{9} \cdot |x_n - x| < \frac{1}{2}|x_n - x|.$$

Pour l'avant-dernière inégalité, on a utilisé $1 + x_n \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $1 + x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. En itérant ce procédé, on obtient

$$|x_{n+1} - x| < \frac{1}{2^n} \cdot |x_1 - x| = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{soit encore} \qquad |x_n - x| < \frac{1}{2^n}$$

Par l'exercice précédent, on sait que $N \leq 2^{N-1}$, et donc aussi $N \leq 2^N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par le cours, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, et par ce qui précède,

$$|x_n - x| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$

La suite (x_n) converge donc bien vers $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

c) L'écriture donnée pour q est la forme "développée" de $q = \lim\limits_{x\to+\infty} x_n$, où

$$x_1 = 1\ , \quad x_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+x_1}\ , \quad x_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+x_2}\ , \quad x_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+x_3}\ , \quad \ldots$$

Cette suite est la suite dont traite cet exercice, et donc $q = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, qui se trouve être l'inverse du nombre d'or (voir aussi l'exercice suivant sur la suite de Fibonacci).

Exercice 5.

a) On a $\dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = 3+\sqrt{5}$ et $\dfrac{(1-\sqrt{5})^2}{2} = \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = 3-\sqrt{5}$.

b) $F_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = 1$,

$F_2 = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = 1$,

$F_3 = \dfrac{(1+\sqrt{5})^3-(1-\sqrt{5})^3}{2^3\sqrt{5}} = \dfrac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-(1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5})}{8\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}(6+10)}{8\sqrt{5}} = 2.$

c) Rappelons que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ est le nombre d'or et notons $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$. On a alors :

$$F_n + F_{n-1} = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(1+\varphi) - \overline{\varphi}^{n-1}(1+\overline{\varphi})}{\sqrt{5}}$$

Par le calcul de **b)**, on a $\varphi^2 = 1+\varphi$ et $\overline{\varphi}^2 = 1+\overline{\varphi}$; donc

$$\frac{\varphi^{n-1}\varphi^2 - \overline{\varphi}^{n-1}\overline{\varphi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} = F_{n+1}$$

Fibonacci étudia cette suite de nombres entiers et l'illustra avec la croissance d'une population de lapins imaginaires (les populations de lapins réels ne croissent pas selon cette suite). On commence avec une paire de lapins ; au bout d'un mois, ils sont adultes et après une gestation d'un mois, la femelle met au monde une deuxième paire de lapins. F_n est le nombre de paires de lapins au bout de n mois. Le nombre de paires au $(n+1)$-ième mois vaut donc F_n (aucun lapin ne meurt !) $+ F_{n-1}$ (chaque paire qui était là un mois avant a eu le temps de s'accoupler). C'est la relation de Fibonacci. Pour connaître le nombre de paires de lapins après 20 mois, on peut utiliser la formule utilisant le nombre d'or plutôt que de devoir itérer 20 fois la relation de récurrence. Voici les 19 premiers nombres de cette suite :

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

d) Comme F_1 et F_2 sont entiers, et que chaque nombre de Fibonacci est la somme des deux précédents, on en déduit que chaque nombre de Fibonacci est entier.

e) On a $\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + q_n$, c'est-à dire $q_{n+1} = \frac{1}{1+q_n}$. Comme $q_1 = 1$, cette suite (q_n) est précisément la suite étudiée dans l'exercice précédent : elle converge vers $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Par la proposition sur les quotients de suites, la suite $(1/q_n)$ converge vers

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{-1^2+\sqrt{5}^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Exercice 6.

a) Vrai. On devine que la limite sera 0, mais montrons-le. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left|\tfrac{1}{n}\right| = \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

On observe que la quantité à rendre plus petite que ε dans notre cas est $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$, qui est exactement celle ci-dessus.

Une autre manière de procéder est d'utiliser le théorème des deux gendarmes (que nous verrons très bientôt), ainsi que le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} -\tfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (-1 \cdot \tfrac{1}{n}) = -\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

par des résultats du cours. Comme $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, et que les deux suites $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers 0, on en conclut que $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge aussi vers 0.

b) Cette assertion est fausse. Prenons par exemple pour (x_n) la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite, et pour (y_n) la suite identiquement nulle ($y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers 0. Alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ et telle que $x_n \cdot y_n = 0$ pour tout n, elle converge donc vers 0.

c) Faux. En effet, pour que l'égalité proposée soit vraie, il faut d'abord s'assurer que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent (voir les hypothèses de la proposition sur la limite d'un produit). Par exemple, les suites de terme général $x_n = (-1)^n$ et $y_n = (-1)^{n+1}$ sont telles que ni $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, ni $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ n'existe, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = -1$.

d) Faux. Par exemple, si $x_n = -n$ et $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, dans ce cas, la suite (x_n) tend vers $-\infty$ et la suite (y_n) converge vers 0. Cependant, la suite $(x_n \cdot y_n)$ est identiquement nulle et converge donc vers 0.

e) Cette assertion est fausse : par exemple, la suite de terme général $x_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$ oscille entre 1 et 2.

f) Cette assertion est fausse : par exemple, la suite $((-1)^n \cdot \frac{1}{n})$ de **a)** n'est pas monotone mais converge vers 0.

Exercice 7.

a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée (résultat du cours). Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ avec $|x_n| \leq A$. En fait, nous aurons besoin de $B := \max\{A; |y|\}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2B}$ pour tout $n \geq N_1$. De même, comme $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2B}$ pour tout $n \geq N_2$. Avec $N := \max\{N_1, N_2\}$, on a pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\overset{\text{idée !}}{=} |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &= |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \leq B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B = \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $x \cdot y$.

b) La suite constante $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a (résultat du cours), et par hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x ; par **a)**, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(a \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \cdot x$. De la même manière, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b \cdot y_n) = b \cdot y$.
Comme la limite d'une somme est la somme des limites (par un exercice précédent), on a

$$\lim_{n\to+\infty}(a \cdot x_n + b \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty}(a \cdot x_n) + \lim_{n\to+\infty}(b \cdot y_n) = a \cdot x + b \cdot y$$

Exercice 8. Supposons a un réel fixé et posons $P(k) : \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n^k} = 0$.

- $P(1)$: Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a par le cours $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(a \cdot \frac{1}{n}\right) = a \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. $P(1)$ est donc vrai.
- $P(k) \implies P(k+1)$: La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge par le cours, la suite $\left(\frac{a}{n^k}\right)$ converge par $P(k)$, et la limite d'un produit est le produit des limites (par le cours ou l'exercice précédent). Conséquemment,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^k} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \overset{P(k)}{=} 0 \cdot 0 = 0.$$

Donc $P(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.

a) $x_2 - x_1 = 1 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 - x_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$, $x_8 - x_4 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}$.

b) $x_{2n} - x_n = \underbrace{\dfrac{1}{2n}}_{\geq 1/2n} + \underbrace{\dfrac{1}{2n-1}}_{\geq 1/2n} + \cdots + \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{\geq 1/2n} \geq n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

c) On a

$$\begin{aligned} 1 &> 1/2, \\ 1/2 &\geq 1/2, \\ 1/3 + 1/4 &> 1/4 + 1/4 = 1/2, \\ 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 &> 4 \cdot 1/8 = 1/2. \end{aligned}$$

En additionnant termes à termes les deux côtés de l'inégalité on obtient $x_8 \geq 4 \cdot 1/2 = 2$ et donc on peut prendre $K = 8$ (avec $1 \geq 1$ plutôt que $1 > 1/2$, on trouverait que l'on peut même prendre $K = 4$).

d) De la même façon, on peut prouver que $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^t} > (t+1) \cdot \dfrac{1}{2}$ et donc si on veut que $x_n \geq 3$ pour tout $n \geq L$, il faut choisir $L = 2^t$ avec t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq 3$. On prend donc $t = 5$ et $L = 2^5 = 32$. (Ou, avec $1 \geq 1$ comme ci-dessus, on trouve $L = 16$. On peut même prendre $L = 11$.)

e) Avec le même raisonnement on prend t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq 4$. Ainsi on peut prendre $t = 7$ et $M = 2^7 = 128$. (Ou encore plus efficacement, $M = 64$, voire encore $M = 31$.)

f) Comme on l'a vu aux points précédents, il suffit de prendre $N = 2^t$ avec t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq k$. Ainsi les x_n sont arbitrairement grands, et la suite (x_n) tend donc vers $+\infty$.

Bonus. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $y \neq 0$, on peut poser $\varepsilon_1 := \frac{|y|}{2} > 0$, et comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \varepsilon_1$ pour tout $n \geq N_1$. De plus, $|y| = |y - y_n + y_n| \leq |y - y_n| + |y_n|$ implique $|y| < \varepsilon_1 + |y_n|$, et donc $\frac{|y|}{2} = |y| - \varepsilon_1 < |y_n|$ pour tout $n \geq N_1$. Ceci nous permet d'écrire (en prévision de la conclusion !) :

$$\frac{1}{|y \cdot y_n|} = \frac{1}{|y| \cdot |y_n|} < \frac{2}{|y| \cdot |y|} = \frac{2}{|y|^2} \quad \text{pour tout } n \geq N_1$$

Considérons maintenant $\varepsilon_2 := \frac{|y|^2}{2\cdot(|x|+|y|)} \cdot \varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \varepsilon_2$ pour tout $n \geq N_2$, et comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \varepsilon_2$ pour tout $n \geq N_3$. En prenant $N := \max\{N_1; N_2; N_3\}$, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| \overset{\text{idée !}}{=} \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y + x \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| \\
&\leq \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y}{y_n \cdot y}\right| + \left|\frac{x \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| = \frac{1}{|y_n \cdot y|} \cdot (\,|y| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |y_n - y|\,) \\
&< \frac{2}{|y|^2} \cdot (\,|x| + |y|\,) \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $\frac{x}{y}$.