Série 20

Exercice 1. En utilisant l'inégalité $2^n \geq \dfrac{n^3}{24}$ démontrée dans les notes de cours (pour n entier et $n \geq 4$), calcule la limite de la suite $(n^2/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.

a) Montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{3^N} < \varepsilon$.

b) Soit la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{3}$$

Détermine si la suite converge, et le cas échéant, donne sa limite.

Exercice 3. Soit la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

Détermine si la suite converge, et le cas échéant, donne sa limite.

Exercice 4. Soit la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$$

a) Montre que $x_n \geq \frac{1}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication. Effectue une (ou deux ?) récurrence(s) en utilisant l'expression de x_{n+2} comme fonction de x_n.

b) Détermine si la suite converge, et le cas échéant, donne sa limite.
Indication. Il peut être utile de montrer que $|x_{n+1} - x| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_n - x|$, où x est ton candidat pour la limite.

c) Donne la valeur de $q = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$

Exercice 5. La suite de Fibonacci. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les nombres

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

a) Calcule $\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}$ et $\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2}$.

b) Calcule F_1, F_2 et F_3.

c) Démontre la relation de récurrence de Fibonacci donnée par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

d) Déduis de cette relation que F_n est un nombre entier pour tout $n \geq 1$.

e) Montre que la suite (q_n) formée par les quotients $q_n = F_n/F_{n+1}$ peut être définie par récurrence comme $q_1 = 1$ et $q_{n+1} = \frac{1}{1+q_n}$. Déduis que cette suite converge, et que la limite de la suite des quotients F_{n+1}/F_n est le nombre d'or (voir Série 8, Exercice 9) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Exercice 6. Vrai ou faux ? Dans chaque cas, donne une justification !

a) La suite $((-1)^n \cdot \frac{1}{n})$ converge.

b) Si la suite (x_n) diverge et la suite (y_n) converge, alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ diverge.

c) Pour des suites (x_n) et (y_n) bornées, on a toujours $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

d) Si la suite (x_n) tend vers $-\infty$ et la suite (y_n) converge, alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ diverge.

e) Une suite bornée positive converge toujours.

f) Une suite convergente est toujours monotone.

Remarque. Une suite est monotone *si $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, auquel cas elle est dite* monotone croissante, *ou si $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, auquel cas elle est dite* monotone décroissante.

Exercice 7. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers x et y respectivement.

a) Montre que la suite $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \cdot y$.

Indication. Utilise la ruse (classique(!)) $|x_n \cdot y_n - x \cdot y| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y|$, ainsi que le fait que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (pourquoi le serait-elle ?), alors il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montre que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors la suite $(ax_n + by_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $ax + by$.

Exercice 8. Démontre par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n^k} = 0$.

Exercice 9. La série harmonique. Nous étudions la suite définie par la formule

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Le but de l'exercice est de voir que cette suite tend vers $+\infty$.

a) Calcule $x_2 - x_1$, $x_4 - x_2$ et $x_8 - x_4$.

b) Montre que $x_{2n} - x_n \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Détermine la valeur d'un entier K tel que $x_n \geq 2$ pour tout $n \geq K$.

d) Détermine la valeur d'un entier L tel que $x_n \geq 3$ pour tout $n \geq L$.

e) Détermine la valeur d'un entier M tel que $x_n \geq 4$ pour tout $n \geq M$.

f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Détermine la valeur d'un entier N tel que $x_n \geq k$ pour tout $n \geq N$. Ce résultat implique que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Bonus. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers x et y respectivement. Montre que si $y \neq 0$ et $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x/y.