Exercice 1.

a) f_7	**c)** f_1	**e)** f_9	**g)** f_3	**i)** f_2	**k)** f_{11}
b) f_{12}	**d)** f_5	**f)** f_8	**h)** f_{10}	**j)** f_4	**l)** f_6

Exercice 2.

a)

Si $n = 0$:	AV en $x = \pm 3$,	AH en $y = 0$.	
Si $n = 1$:	AV en $x = 3$,	AH en $y = 0$,	trou en $P = \left(-3; -\frac{1}{6}\right)$.
Si $n = 2$:	AV en $x = \pm 3$,	AH en $y = 1$.	
Si $n = 3$:	AV en $x = \pm 3$	AO en $y = x$.	
Si $n \geq 4$:	AV en $x = \pm 3$,	pas d'AO.	

b) À l'aide du "Truc du Reste" (et de Horner) pour le dénominateur, et de la différence de 2 carrés pour le numérateur, on factorise (où le second facteur du dénominateur est irréductible puisque son $\Delta = -3 < 0$) :

$$f(x) = \frac{(x-1)^n(x+1)^n}{(x-1)(3x^2+3x+1)}$$

Si $n = 0$:	AV en $x = 1$,	AH en $y = 0$.	
Si $n = 1$:	pas d'AV,	AH en $y = 0$,	trou en $P = \left(1; \frac{2}{7}\right)$.
Si $n = 2$:	pas d'AV,	AO en $y = \frac{1}{3}x$,	trou en $P = (1; 0)$.
Si $n \geq 3$:	pas d'AV	pas d'AO,	trou en $P = (1; 0)$.

Exercice 3.

a) • VI(f) : $2x^2 = 0$, $x = 0$ | $Z(f)$: $4 - x^2 = 0$, $(2-x)(2+x) = 0$, $x = 2$ ou $x = -2$

Donc $\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ et $Z(f) = \{-2; 2\}$. Avec $D(f)$ établi, nous pouvons considérer pour la suite

$$\tilde{f}(x) = \frac{4 - x^2}{2x} \qquad (\text{si } x \neq 0)$$

TDS :

		-2		0		2	
$-x^2+4$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

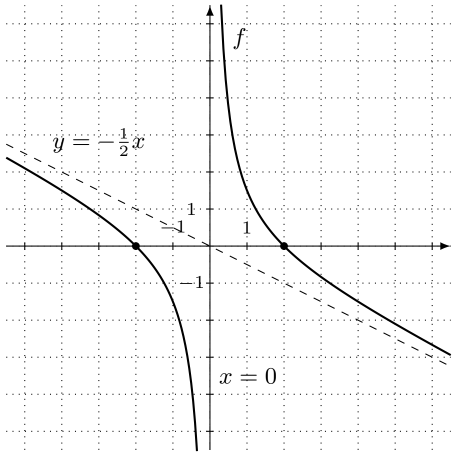
• AV en $\boxed{x = 0}$ car "$\tilde{f}(0)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).

AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne $-x^2 + 4 = -\frac{1}{2}x \cdot 2x + 4$, donc $\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ (puisque le dénominateur est un monôme, on aurait aussi pu obtenir directement $\tilde{f}(x) = \frac{-x^2+4}{2x} = \frac{-x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$). D'où $\boxed{y = -\frac{1}{2}x}$ est AO, et $\boxed{\delta(x) = \frac{2}{x}}$ avec $Z(\delta) = \emptyset$.

TDP :

		0	
2	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$
$\tilde{f}(x)$/AO	sous	‖	sur

- Graphe (avec o.o. non définie) :



b) • VI(f) :

$$(3x-2)^2=0$$
$$3x-2=0$$
$$x=\tfrac{2}{3}$$

$Z(f)$:

$$x^2=0$$
$$x=0$$

Donc $\boxed{D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}}$ et $Z(f)=\{0\}$.

TDS :

		0		$\frac{2}{3}$	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$(3x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$	$\|$	$+$

- AV en $\boxed{x=\frac{2}{3}}$ car "$f\left(\frac{2}{3}\right)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).

AO (ici, AH en fait) : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne

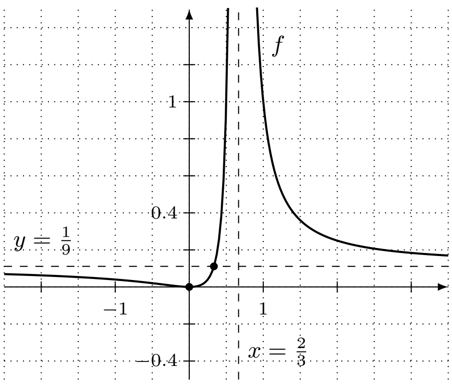
$$x^2=\tfrac{1}{9}\cdot(9x^2-12x+4)+\tfrac{4}{3}x-\tfrac{4}{9}$$

donc $f(x)=\frac{1}{9}+\frac{\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}}{(3x-2)^2}=\frac{1}{9}+\frac{12x-4}{(9x-6)^2}$. D'où $\boxed{y=\frac{1}{9}}$ est AH, et $\boxed{\delta(x)=\frac{12x-4}{(9x-6)^2}}$ avec $Z(\delta)=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

TDP :

		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$12x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$(9x-6)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
$\tilde{f}(x)$/AO	sous	χ	sur	$\|$	sur

- Graphe (avec $f(0)=0$) :



c) • VI(f) :

$$(x-1)(x^2-1)=0$$
$$(x-1)(x-1)(x+1)=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=-1$$

$Z(f)$:

$$(x+1)^3=0$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Donc $\boxed{D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}}$ et $Z(f)=\emptyset$ (car $x=-1$ est déjà VI). Avec $D(f)$ en tête, on peut considérer pour la suite

$$\tilde{f}(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\qquad(\tilde{f}(x)=f(x)\text{ si }x\neq-1)$$

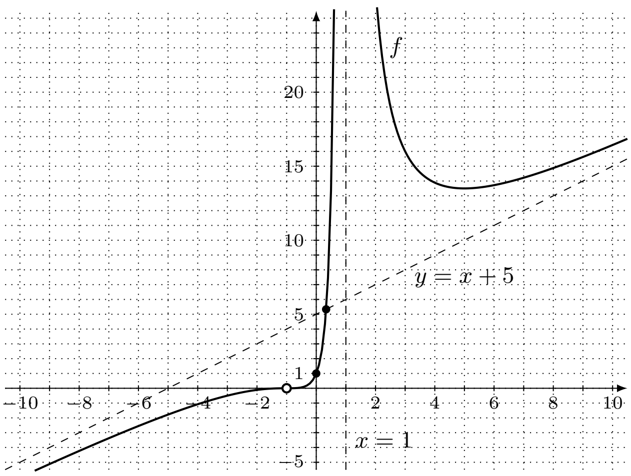
TDS :

	-1		1	
$(x+1)^2$	$+$	0 $+$		$+$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\|\|$ $+$	$\|\|$	$+$

- Trou en $\boxed{(-1;0)}$ car $\tilde{f}(-1)=0$, et AV en $\boxed{x=1}$ car "$f(1)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).
  AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne
  $$x^3+3x^2+3x+1=(x+5)(x^2-2x+1)+12x-4$$
  donc $\tilde{f}(x)=x+5+\frac{12x-4}{(x-1)^2}$. D'où $\boxed{y=x+5}$ est AO, et $\boxed{\delta(x)=\frac{12x-4}{(x-1)^2}}$ avec $Z(\delta)=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.
  TDP (il n'est pas nécessaire d'inclure la VI $x=-1$ dans le tableau si on garde en tête $D(f)$; en effet, la courbe $y=\delta(x)$ n'est qu'un guide pour aider à la représentation du graphe de f) :

	$\frac{1}{3}$		1	
$12x-4$	$-$	0 $+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	0 $+$	$\|\|$	$+$
$\tilde{f}(x)$/AO	sous	χ sur	$\|\|$	sur

- Graphe (avec $f(0)=1$) :



d) • VI(f) :
$$x(x^2+1)=0$$
$$x=0$$
(x^2+1 n'est jamais nul)

$Z(f)$:
$$x(x^3+1)=0$$
$$x(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$x=0$ et $x=-1$ sont les zéros du numérateur
(le Δ de x^2-x+1 est négatif) mais $x=0$ n'est pas un zéro de f (car VI)

Donc $\boxed{D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, $Z(f)=\{-1\}$ et la forme réduite (factorisée) de $f(x)$ est $\tilde{f}(x)=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2+1}$.
TDS :

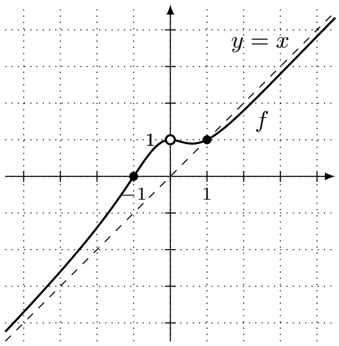
	-1		0	
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
x^2-x+1	$+$	$+$		$+$
x^2+1	$+$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0 $+$	$\|\|$	$+$

- Trou en $\boxed{(0;1)}$ (car $\tilde{f}(0)=1$), et pas d'AV (parce que $\tilde{f}$ n'a pas de VI).
  AO : L'équation fondamentale de la division de x^3+1 par x^2+1 est $x^3+1=x\cdot(x^2+1)-x+1$, donc $\tilde{f}(x)=x+\frac{-x+1}{x^2+1}$. D'où $\boxed{y=x}$ est AO, et $\boxed{\delta(x)=\frac{-x+1}{x^2+1}}$ (avec $Z(\delta)=\{1\}$).

TDP :

	1
$-x+1$	$+ \quad 0 \quad -$
x^2+1	$+ \qquad +$
$\delta(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$\tilde{f}(x)$/AO	sur χ sous

- Graphe :



Exercice 4.

- **Expression de f.** Comme il n'y a pas de "trou", on peut supposer que $f(x)$ est sous forme irréductible.
  Les deux AV d'équations $x = -3$ et $x = 2$ indiquent que le dénominateur de $f(x)$ aura au moins comme facteurs $(x+3)$ et $(x-2)$. Supposons donc que le dénominateur est bien $(x+3)(x-2)$.
  L'AH d'équation $y = -2$ donne alors $f(x) = -2 + \frac{r(x)}{(x+3)(x-2)}$ où $r(x) = ax + b$ (le degré du numérateur de $\delta(x)$ est nécessairement strictement inférieur au degré du diviseur).
  Donc $f(x) = \frac{-2x^2-2x+12+ax+b}{x^2+x-6}$. Comme $f(0) = 0$, le numérateur de $f(x)$ évalué en 0 est nul, et alors $b = -12$.
  Avec $f(x) = \frac{-2x^2-2x+ax}{x^2+x-6} = \frac{x(-2x-2+a)}{x^2+x-6}$ et le fait que f n'a qu'un seul zéro, on déduit $a = 2$ et

$$f(x) = \frac{-2x^2}{(x+3)(x-2)}$$

  Une étude succincte du signe de $f(x)$ (par exemple, on remarque que $f(x)$ est négatif si $x < -3$, puis, au vu du degré de chacun de ses facteurs, $f(x)$ change de signe en $x = -3$, en $x = 2$, mais pas en $x = 0$) peut confirmer que le graphe donné correspond bien à cette expression.
- **Expression de g.** Comme dans le cas précédent, on peut supposer que $g(x)$ est sous forme irréductible.
  Les deux AV d'équations $x = -2$ et $x = 0$ suggèrent que le dénominateur est $x(x+2)$.
  L'AO d'équation $y = x$ mène alors à $g(x) = x + \frac{r(x)}{x(x+2)}$ où $r(x) = ax + b$. Comme le graphe de g intersecte l'AO en $x = 1$, on a $r(1) = 0$, c'est-à-dire $b = -a$.
  Donc $g(x) = \frac{x^3+2x^2+ax-a}{x^2+2x}$. Avec $g(-1) = 1$, on obtient $\frac{1-2a}{-1} = 1$, soit $a = 1$, et alors

$$g(x) = \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+2x}$$

  Le numérateur de $g(x)$ n'est pas facilement factorisable par les méthodes que nous connaissons : nous ne vérifions pas plus loin cette expression (qui, par ailleurs, est bien l'expression de la fonction représentée !).

Exercice 5. L'ensemble $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ est majoré par $2 \in \mathbb{Q}$ car pour tout $y \in S$, on a $y \leq \sqrt{2} < 2 \in \mathbb{Q}$ (en effet, si $\sqrt{2} < y$, alors $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot y < y \cdot y = y^2$, c'est-à-dire $y \notin S$). Voyons que $\sqrt{2}$ est bien la borne supérieure de S (comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on aura gagné).
Supposons par contradiction que S possède une borne supérieure b avec $b < \sqrt{2}$ (pour l'exercice, on espère trouver un tel $b \in \mathbb{Q}$). Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $b < r < \sqrt{2}$. Cependant, cette dernière inégalité signifie que $r \in S$ or cela n'est pas possible car b était supposé être une borne supérieure, et donc en particulier un majorant de S.

Exercice 6. Montrons tout d'abord que l'intervalle $]a; b[$ contient un nombre infini de rationnels. Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. Par conséquent, nous pouvons écrire $]a; b[\cap \mathbb{Q} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ avec la propriété que $a < r_1 < \cdots < r_2 < b$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < r_1$.

On arrive donc à la contradiction que $q \in]a;b[\cap \mathbb{Q}$ mais pourtant $q \notin \{r_1, \dots, r_n\}$. Ainsi notre hypothèse de départ est fausse et donc $]a;b[$ contient une infinité de rationnels.
Étant donné qu'entre deux rationnels, il y a toujours un irrationnel (par exemple, si $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, alors $r = a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$ est un irrationel strictement compris entre a et b), on conclut qu'il y a également une infinité d'irrationels.

Exercice 7.

a) Faux car $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

b) Faux car $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

c) Vrai, soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels alors $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd} \in \mathbb{Q}$.

d) Faux car $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + (-\sqrt{2})) = 0 \in \mathbb{Q}$.

e) Cette assertion est vraie. Supposons le contraire et soit n un entier premier tel que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible (c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux). En élevant cette égalité au carré on a $nq^2 = p^2$; donc n divise p^2 et figure forcément dans la décomposition en facteurs premiers de p : $p = np'$. Ceci implique $nq^2 = n^2p'^2$, $q^2 = np'^2$, et donc n divise q^2. Ainsi n figure forcément dans la decomposition en facteurs premiers de q, mais alors p et q ne sont pas premiers entre eux, ce qui est une contradiction.

f) Faux car $\sqrt[3]{8} = 2$.

Exercice 8. Raisonnons par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 0$, la somme à gauche de l'égalité vaut 1 ; à droite de l'égalité, on a $\dfrac{1 - x^{1+0}}{1-x} = 1$ pour tout $x \neq 1$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que l'égalité est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} = (1+x+x^2+\cdots+x^n)+x^{n+1} \overset{\text{réc.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

L'égalité est donc vraie pour $n+1$ si elle l'est pour n. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons que pour $n = 1, 2$, cette formule est déjà apparue dans le cadre de la factorisation de polynômes sous la forme :

$$(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

En prenant l'égalité que l'on vient de démontrer avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Exercice 9. Appelons $P(n)$ l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Montrons $P(0)$. D'un côté, $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. De l'autre, $\dfrac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$. Les deux côtés valent 0, l'égalité est démontrée dans ce cas.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée, et $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.