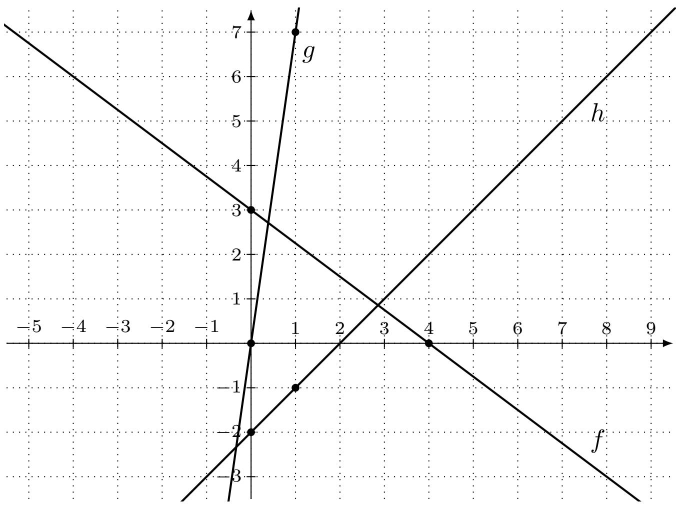
Exercice 1. Au temps $t = 0$, la baignoire contiendra 165 litres, on en déduit que l'ordonnée à l'origine de la fonction cherchée est 165. Si on gradue l'axe des abscisse en secondes, en une seconde la baignoire se videra de $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ litres et après t secondes, la baignoire contiendra donc $165 - \frac{1}{2}t$. Si on veut calculer quand la baignoire sera complétement vide, nous devons résoudre l'équation $165 - \frac{1}{2}t = 0$ et ainsi déterminer l'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des abscisses. On trouve $165 = \frac{1}{2}t$, soit $t = 2 \cdot 165 = 330$.
Ainsi la baignoire sera vide après 330 secondes $= \frac{330}{60} = 5.5$ minutes. La situation est représentée sur le graphique suivant. La raison pour laquelle nous avons choisi de travailler en secondes et pas en minutes est qu'avec des minutes la pente de la droite serait de -30 et on ne verrait pas vraiment où est l'intersection.

Exercice 2. La pente est le coefficient de x et l'ordonnée à l'origine et la valeur de la fonction en $x = 0$. Une fois que l'on a ces deux valeurs, il est possible de dessiner le graphe de la fonction en reportant la valeur de l'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées et ensuite en déterminant un deuxième point de la droite grâce à la pente. Par exemple, la pente de f est $-\frac{3}{4}$: quand on avance depuis point du graphe de f de 4 unités et qu'on monte de -3 unités, on retombe sur un point du graphe. On remarquera encore que l'intersection de la droite ainsi déterminée avec l'axe des abscisses représente la solution de l'équation $f(x) = 0$.

a) La pente est $-\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est $f(0) = 3$.

b) La pente est 7 et l'ordonnée à l'origine est $g(0) = 0$. La droite passe donc par l'origine.

c) La pente est 1 et l'ordonnée à l'origine est $h(0) = -2$.



Exercice 3.

a) L'équation générale d'une droite est $y = ax + b$, où a est la pente et b l'ordonée à l'origine. Ici la droite passe par le point $(3;1)$, donc $1 = a \cdot 3 + b$, et par le point $(4;-2)$, donc $-2 = a \cdot 4 + b$. Il s'agit ensuite de résoudre le système formé de ces deux équations afin de trouver la pente a et l'ordonnée à l'origine b.
$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3a & + & b & = & 1 \\ 4a & + & b & = & -2 \end{array}\right.$ Soustrayons la première équation de la deuxième et gardons la première :
$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3a & + & b & = & 1 \\ a & & & = & -3 \end{array}\right.$
Substituons $a = -3$ dans la première équation pour obtenir $3 \cdot (-3) + b = 1$ et donc $b = 10$. Ainsi l'équation de la droite cherchée est $y = -3x + 10$.

b) Comme f est une fonction affine, elle s'écrit $f(x) = ax + b$. Déterminons la valeur de a et b comme au point **a)** de cet exercice. Écrivons le système formé des deux équations $f(1) = a + b = 4$ et $f(2) = 2a + b = 0$:
$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 4 \\ 2a & + & b & = & 0 \end{array}\right.$ Soustrayons la première équation de la deuxième et gardons la première :
$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 4 \\ a & & & = & -4 \end{array}\right.$
Substituons $a = -4$ dans la première équation pour obtenir $-4 + b = 4$ et donc $b = 8$. Ainsi l'équation de la fonction affine cherchée est $f(x) = -4x + 8$.

c) Déterminons les valeurs de a et b telles que la droite d'équation $y = ax+b$ satisfasse les conditions demandées. Dans ce cas la pente est donnée et on pose donc $a = -\frac{5}{4}$ et ainsi $y = -\frac{5}{4}x + b$. La droite doit passer par le point $(1;-1)$ et donc $-1 = -\frac{5}{4} \cdot 1 + b =$ ce qui implique que $b = -1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$. Ainsi l'équation de la droite cherchée est $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$.

d) Écrivons l'équation de la droite cherchée $y = ax + b$. Comme cette droite doit être parallèle à la droite $y = 5x + 2$, la pente de la droite cherchée doit également être égale à 5, posons donc $a = 5$. De plus, cette droite doit passer par le point $(1;3)$ et donc $3 = 5 \cdot 1 + b$, ce qui implique que $b = -2$. Ainsi l'équation de la droite cherchée est $y = 5x - 2$.

e) Écrivons l'équation de la droite cherchée $y = ax + b$. Comme cette droite doit être perpendiculaire à la droite $y = 5x + 2$, la pente de la droite cherchée doit être égale à $-\frac{1}{5}$ (les pentes a et a' de deux droites perpendiculaires vérifient la relation $a \cdot a' = -1$), posons donc $a = -\frac{1}{5}$. De plus, cette droite doit passer par le point $(5;5)$ et donc $5 = -\frac{1}{5} \cdot 5 + b$, ce qui implique que $b = 5 + 1 = 6$. Ainsi l'équation de la droite cherchée est $y = -\frac{1}{5}x + 6$.

Exercice 4. L'échelle de conversion étant affine, on pose que pour transformer des degrés Celsius en degrés Farenheit on utilise la fonction affine $f(x) = ax+b$. Ce qui signifie que x degrés Celsius correspondent à $f(x)$ degrés Farenheit. Premièrement 0°C correspond à 32°F et donc $f(0) = a \cdot 0 + b = 32$, deuxièment 100°C correspondent à 212°F et donc $f(100) = a \cdot 100 + b = 212$. En écrivant des deux équations en système, cela donne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} & & b & = & 32 \\ 100a & + & b & = & 212 \end{array}\right.$$

En insérant $b = 32$ dans la deuxième équation, il vient $100a + 32 = 212$ et donc $a = \frac{212-32}{100} = \frac{9}{5}$. Ainsi la règle de conversion des degrés °C en °F est

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Posons ensuite que y degrés °F correspondent à $g(y)$°C. En résolvant l'équation $\frac{9}{5}x + 32 = y$ en x, on trouve que

$$x = g(y) = \frac{5}{9}(y - 32)$$

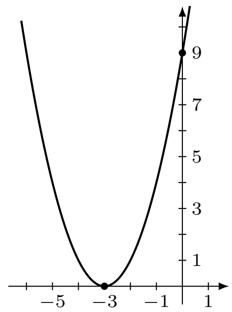
donne la règle de conversion des degrés °F en °C. Transformons ces deux valeurs en degrés Celsius par notre fonction g. Le superordinateur pourra donc fonctionner entre des températures de $g(41) = \frac{5}{9}(41 - 32) = 5$ °C et $g(95) = \frac{5}{9}(95 - 32) = 35$ °C.

Exercice 5. Rappelons que le graphe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ décrit une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. L'ordonnée à l'origine est la valeur de la fonction en 0 : $f(0) = c$, tandis que les abscisses à l'origine sont les valeurs x telles que $f(x) = 0$, c'est-à-dire les zéros du polynômes $ax^2 + bx + c$. Dans tous les cas, on commencera par calculer la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$ qui nous indiquera en plus si la parabole représentée par la fonction quadratique donnée coupe l'axe Ox ou pas.

a) $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{6}{2}; -\frac{0}{4}\right) = (-3; 0)$, $f(0) = 9$ est l'ordonnée à l'origine, et les zéros sont $\frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} = -3$ (Il n'y a qu'un seul zéro qui est donc double). Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x		-3	
$x+3$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$
$(x+3)(x+3)$	$+$	0	$+$

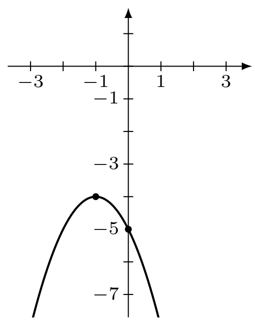
On obtient le graphe suivant :



b) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -16$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{-2}{2\cdot(-1)}; -\frac{-16}{4\cdot(-1)}\right) = (-1; -4)$, $f(0) = -5$ est l'ordonnée à l'origine, et il n'y a pas de zéros car le discriminant est négatif (la parabole ne coupe donc pas l'axe Ox). Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x	
$-x^2 - 2x - 5$	$-$

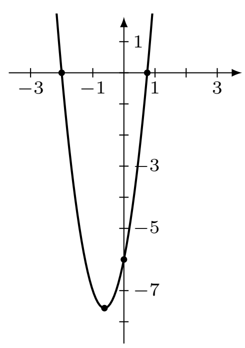
On obtient le graphe suivant :



c) $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 121 = 11^2$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{5}{2\cdot4}; -\frac{121}{4\cdot4}\right) = \left(-\frac{5}{8}; -\frac{121}{16}\right)$, $f(0) = -6$ est l'ordonnée à l'origine, et les zéros sont $\frac{-5 \pm 11}{2\cdot4}$, soit $\frac{3}{4}$ et -2. Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x		-2		$\frac{3}{4}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(4x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

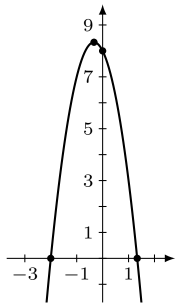
On obtient le graphe suivant :



d) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8 = 100 = 10^2$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{-2}{2\cdot(-3)}; -\frac{100}{4\cdot(-3)}\right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{25}{3}\right)$, $f(0) = 8$ est l'ordonnée à l'origine, et les zéros sont $\frac{2\pm 10}{2\cdot(-3)}$, soit $\frac{4}{3}$ et -2. Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-(3x-4)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$-(x+2)(3x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

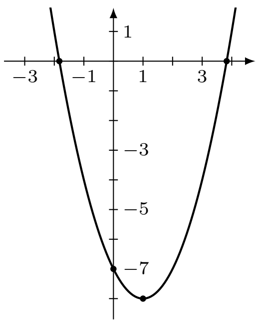
On obtient le graphe suivant :



e) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 32 = 4^2 2$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{-2}{2\cdot 1}, -\frac{32}{4\cdot 1}\right) = (1, -8)$, $f(0) = -7$ est l'ordonnée à l'origine, et les zéros sont $\frac{2\pm 4\sqrt{2}}{2}$, soit $1 + 2\sqrt{2}$ et $1 - 2\sqrt{2}$. Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x		$1-2\sqrt{2}$		$1+2\sqrt{2}$	
$x-(1-2\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-(1+2\sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-(1-2\sqrt{2}))(x+(1-2\sqrt{2}))$	$+$	0	$-$	0	$+$

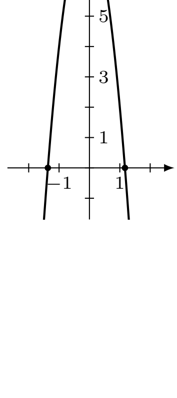
On obtient le graphe suivant :



f) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 8 = 161$. Le sommet de la parabole est $S = \left(-\frac{-1}{2\cdot(-5)}, -\frac{161}{4\cdot(-5)}\right) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{161}{20}\right)$, $f(0) = 8$ est l'ordonnée à l'origine, et les zéros sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{161}}{-10} = -\frac{1+\sqrt{161}}{10}$ et $x_2 = -\frac{1-\sqrt{161}}{10}$. Le tableau des signes de cette fonction s'écrit

x		$-\frac{1+\sqrt{161}}{10}$		$-\frac{1-\sqrt{161}}{10}$	
$x-x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-5(x-x_2)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$-5(x-x_1)(x-x_2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On obtient le graphe suivant :



Exercice 6. Le graphe d'une fonction quadratique est une parabole dont l'équation générale est $y = ax^2+bx+c$. Comme la parabole cherchée passe par les points $(2;9)$, $(-6;-7)$ et $(1;0)$, on peut écrire les équations $9 = a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$, $-7 = a\cdot(-6)^2+b\cdot(-6)+c$ et $0 = a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$. Pour déterminer l'équation de la parabole, il s'agit ainsi de résoudre en a, b, c le système formé de ces trois équations. Nous pourrions le résoudre par la méthode de Gauss (par exemple), mais il se trouve que sa forme particulière invite à une résolution plus agréable (en commençant par éliminer les c dans deux lignes, et, ici, en observant la relation entre les autres coefficients) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 4a & + & 2b & + & c & = & 9 & \\ 36a & - & 6b & + & c & = & -7 & \rightsquigarrow L_2-L_1 \\ a & + & b & + & c & = & 0 & \rightsquigarrow L_3-L_1 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 4a & + & 2b & + & c & = & 9 & \\ 32a & - & 8b & & & = & -16 & \rightsquigarrow \frac{1}{8}L_2 \\ -3a & - & b & & & = & -9 & \rightsquigarrow -L_3 \end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 4a & + & 2b & + & c & = & 9 & \\ 4a & - & b & & & = & -2 & \\ 3a & + & b & & & = & 9 & \rightsquigarrow L_3+L2 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4a & + & 2b & + & c & = & 9 \\ 4a & - & b & & & = & -2 \\ 7a & & & & & = & 7 \end{array}\right.$$

La dernière ligne (du dernier système) donne $a = 1$, qui substitué dans la deuxième donne $b = 6$, et ces deux valeurs dans la première donnent $c = -7$. Ainsi la parabole cherchée est d'équation $y = x^2+6x-7$.

Exercice 7. Soit un point $P = (x;y)$ à égale distance de F et d. Par Pythagore, la distance de P à F au carré est $\overline{PF}^2 = (x-0)^2+(y-\frac{1}{4a})^2 = x^2+y^2-\frac{y}{2a}+\frac{1}{16a^2}$, et la distance de P à d au carré est $(y+\frac{1}{4a})^2 = y^2+\frac{y}{2a}+\frac{1}{16a^2}$. Ces deux distances au carré doivent être égales : $x^2+y^2-\frac{y}{2a}+\frac{1}{16a^2} = y^2+\frac{y}{2a}+\frac{1}{16a^2}$. Après simplification, on trouve la condition $x^2 = \frac{y}{a}$, soit $y = ax^2$. Cette condition est donc une condition nécessaire pour que $(x;y)$ soit à même distance de F et d, et nous avons vu au cours qu'elle est aussi suffisante.

Exercice 8.

a) Vrai, par une proposition du cours, cette parabole est décrite par l'équation $y = \frac{1}{4}x^2$.

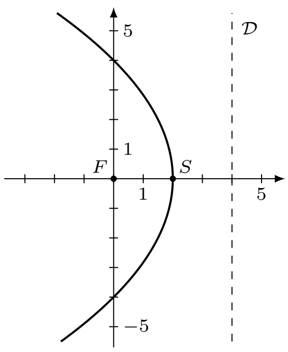
b) Faux. Pour cette parabole, $\Delta = (-48)^2-4\cdot 1\cdot 0 = 2304$, et donc son sommet est $S = \left(\frac{48}{2\cdot 1}; -\frac{2304}{4\cdot 1}\right) = (24;-576)$.

c) Vrai. En procédant comme à l'exercice 6 avec les points $(2;0)$, $(-1;-3)$ et $(0;-4)$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & -3 \\ & & & & c & = & -4 \end{array}\right.$$

qui admet comme ensemble de solution $\{(1;0;-4)\}$. Ainsi la parabole $y = x^2-4$ passe par les points $(2;0)$, $(-1;-3)$ et $(0;-4)$. Comme $(-3)^2-4 = 5$, on constate que le point $(-3;5)$ appartient également à cette parabole.

d) Vrai. Une parabole est définie par un foyer et une droite directrice. Ici la droite directrice est la droite d'équation $x = 4$. La parabole est représentée ci-dessous. (Attention, cette parabole n'est pas le graphe d'une fonction quadratique !)



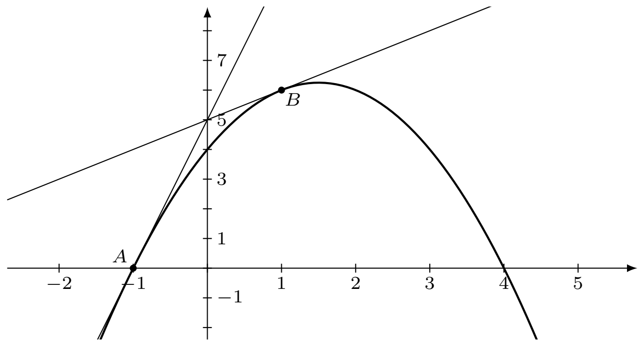
e) Faux. Supposons que le graphe de f est bien une parabole. Par symétrie du graphe, l'axe de la parabole doit être la droite verticale $x = 0$, et sa directrice une droite horizontale ; le foyer F sera un point de l'axe, et le sommet sera $S = (0;1)$. On peut définir un nombre $a > 0$ tel que la distance de S au foyer est $\frac{1}{4a}$; donc $F = \left(0;1+\frac{1}{4a}\right)$ (comme la parabole est en "$\cup$", le foyer est "plus haut" que le sommet) et $\mathcal{D}$ est d'équation $y = 1-\frac{1}{4a}$. Comme $P = (1;2)$ est un point du graphe de f, l'équation $\delta(P;F)^2 = \delta(P;\mathcal{D})^2$ donne $a = 1$. Selon le cours, le lieu des points à même distance de $F = \left(0;\frac{5}{4}\right)$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}$ est la courbe $y = x^2+1$. Or le point $R = (2;17)$ appartient au graphe de f mais pas à la courbe $y = x^2+1$ (alternativement, on peut vérifier que $\delta(Q;F) \neq \delta(Q;\mathcal{D})$).

Exercice 9. Notons x l'un des deux nombres réels cherchés. Comme la somme des deux nombres cherchés est 35, le second nombre est $35-x$. Nous cherchons la valeur maximale du produit de ces deux nombres, c'est-à-dire la valeur maximale de la fonction $f(x) = x(35 - x) = -x^2 + 35x$. Comme cette fonction est quadratique, nous pouvons calculer son sommet grâce à la formule du cours, $\Delta = 35^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 1225$, $S = \left(\frac{35}{2}; \frac{1225}{4}\right)$. Ainsi la valeur maximale de la fonction $f(x)$ est $\frac{1225}{4} = 306.25$, elle est atteinte lorsque $x = \frac{35}{2} = 17.5$ et donc les deux nombres cherchés sont 17.5 et $35 - 17.5 = 17.5$

Exercice 10. La droite d'équation $y = mx + 5$ est tangente à la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x + 4$ si et seulement si la droite et la parabole se coupent en un seul point, ce qui est le cas si et seulement si l'équation $-x^2 + 3x + 4 = mx + 5$ admet une unique solution.

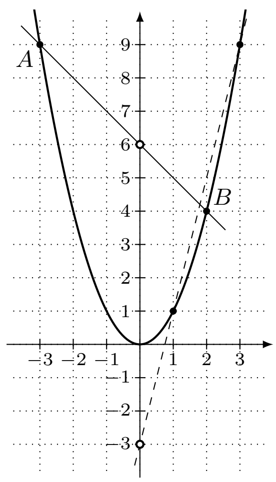
$$-x^2 + 3x + 4 = mx + 5 \iff -x^2 + (3 - m)x - 1 = 0.$$

Cette dernière équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul.
$\Delta = (3 - m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 9 - 6m + m^2 - 4 = m^2 - 6m + 5 = (m - 5)(m - 1)$
Ainsi, comme le discriminant est nul uniquement pour les valeurs $m = 1$ et $m = 5$, ce sont les uniques valeurs pour lesquelles la droite est tangente à la parabole. Pour $m = 5$, le point d'intersection est la solution de l'équation $-x^2 + 3x - 1 = 5x + 5 \iff -x^2 - 2x - 1 = 0$, pour cette équation nous avons déjà calculé le disciminant qui est égal à $(m - 1)(m - 5)$ et donc 0 si $m = 5$, ainsi $x = \frac{2}{-2} = -1$ et le point de tangence est donc $(-1; 0)$, où la seconde coordonnée est obtenue en résolvant $y = 5 \cdot (-1) + 5 = 0$.
Pour $m = 1$, le point d'intersection est la solution de l'équation $-x^2 + 3x - 1 = x + 5 \iff -x^2 + 2x - 1 = 0$, pour cette équation nous avons déjà calculé le disciminant qui est égal à $(m - 1)(m - 5)$ et donc 0 si $m = 1$, ainsi $x = \frac{-2}{-2} = 1$ et le point de tangence est donc $(1; 6)$, où la seconde coordonnée est obtenue en résolvant $y = 1 \cdot (1) + 5 = 6$.
Ci-dessous, on a représenté la parabole, les droites d'équations $y = 5x + 5$, $y = x + 5$ ainsi que les points de tangence $A = (-1; 0)$ et $B = (1; 6)$.



Exercice 11. Notons x la largeur de chacune des deux bandes redressées de la pièce en métal. Comme la pièce mesure 30 cm de large, le fond de la gouttière aura une largeur de $30 - 2x$ cm. Pour que le volume soit maximal, il faut que la section rectangulaire ait une aire maximale. La section étant rectangulaire, son aire s'écrit $f(x) = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x$. Cherchons la valeur de x pour laquelle la fonction f atteint son maximum. Comme f est une fonction quadratique, on peut calculer le sommet de son graphe : $\Delta = 30^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 900$, $S = \left(-\frac{30}{2 \cdot (-2)}; -\frac{900}{4 \cdot (-2)}\right) = (7.5; 112.5)$. Ainsi la fonction f atteint son maximum en $x = 7.5$ et l'aire maximale correspondante de la section rectangulaire est de 112.5 cm^2. La largeur des bandes est donc de 7.5 cm.

Exercice 12.



a) La représentation graphique est donnée ci-contre.

b) Dans le système d'axes ci-contre, les abscisses -3 et 2 donnent une ordonnée à l'origine de 6. D'autres paires de points semblent confirmer que *l'ordonnée à l'origine de AB est l'opposé du produit des abscisses de A et de B !*

Démontrons-le. Comme A et B sont sur la parabole d'équation $y = x^2$, on peut écrire $A(a; a^2)$ et $B(b; b^2)$ (où $a, b \in \mathbb{R}$). La pente de AB est

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b \ .$$

L'équation de AB est donc de la forme $y = (a + b)x + h$, et puisque la droite passe par A, on a $a^2 = (a + b)a + h$. L'ordonnée à l'origine de AB vaut donc bien l'opposé du produit des abscisses : $h = -ab$.

c) Le calcul ci-dessus montre que *la pente de AB est la somme des abscisses de A et de B !*