Exercice 1.

a) $\dfrac{2x+1}{2(x+2)} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{(2x+1)(x+2)-3x^2\cdot 2}{2(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+5x+2-6x^2}{2(x+2)^2} = \dfrac{-4x^2+5x+2}{2(x+2)^2}$.

b) $\dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{3}{5-x} = \dfrac{x+4}{x-5} - \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{x+4-3}{x-5} = \dfrac{x+1}{x-5}$.

c) $\dfrac{x}{x^2-y^2} - \dfrac{x}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{2(y-x)} = \dfrac{x}{(x+y)(x-y)} - \dfrac{x}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{2(x-y)} = \dfrac{x\cdot 2(x+y) - x\cdot 2(x-y) - (x+y)^2}{2(x+y)^2(x-y)} =$
$\dfrac{2x^2+2xy-2x^2+2xy-x^2-2xy-y^2}{2(x+y)^2(x-y)} = \dfrac{-(x^2-2xy+y^2)}{2(x+y)^2(x-y)} = \dfrac{-(x-y)^2}{2(x+y)^2(x-y)} = \dfrac{-(x-y)}{2(x+y)^2}$.

d) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)(x^2+1)+(x+1)^2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{x^3-x^2+x-1+x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{x^3+3x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{x(x^2+3)}{(x+1)(x^2+1)}$.

e) $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-2y}{x+y} + \dfrac{x^2+3y^2}{y^2-x^2} = \dfrac{(x+y)(x+y)+(x-2y)(x-y)-(x^2+3y^2)}{(x-y)(x+y)} =$
$\dfrac{x^2+2xy+y^2+x^2-xy-2xy+2y^2-x^2-3y^2}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x^2-xy}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x}{x+y}$

f) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{4x-6y}{xy+3y+2x+6} + \dfrac{y+6}{y+2} = \dfrac{(x-3)(y+2)-(4x-6y)+(y+6)(x+3)}{(x+3)(y+2)} =$
$\dfrac{xy+2x-3y-6-4x+6y+xy+3y+6x+18}{(x+3)(y+2)} = \dfrac{2xy+4x+6y+12}{(x+3)(y+2)} = \dfrac{2(x+3)(y+2)}{(x+3)(y+2)} = 2$.

g) $\dfrac{-3x^4}{(x+1)^4} + \dfrac{4x^3(x+1)^3}{(x+1)^6} = \dfrac{-3x^4+4x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-3x^4+4x^4+4x^3}{(x+1)^4} = \dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$.

h) $\dfrac{2}{5b} - \dfrac{4}{3a^3} - \dfrac{1}{6a^2b^2} = \dfrac{2\cdot 6a^3b - 4\cdot 10b^2 - 1\cdot 5a}{30a^3b^2} = \dfrac{12a^3b-40b^2-5a}{30a^3b^2}$.

i) $\dfrac{3x}{3x^2-12x} + \dfrac{1}{6x} = \dfrac{6x+(x-4)}{6x(x-4)} = \dfrac{7x-4}{6x(x-4)}$.

j) $\dfrac{m-1}{m^2-4m+4} + \dfrac{m+3}{m^2-4} + \dfrac{2}{2-m} = \dfrac{(m-1)(m+2)+(m+3)(m-2)-2(m-2)(m+2)}{(m-2)^2(m+2)} =$
$\dfrac{m^2-m-2+2m+m^2-2m+3m-6-2m^2+8}{(m-2)^2(m+2)} = \dfrac{2m}{(m-2)^2(m+2)}$.

Exercice 2.

a) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}} = \dfrac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}} = \dfrac{a^2-b^2}{ab}\cdot\dfrac{ab}{a^2+2ab+b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b2} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

b) $\dfrac{\frac{2}{x+h}-\frac{2}{x}}{h} = \dfrac{\frac{2x-2(x+h)}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \dfrac{2x-2x-2h}{x(x+h)}\cdot\dfrac{1}{h} = \dfrac{-2h}{x(x+h)h} = \dfrac{-2}{x(x+h)}$.

c) $\dfrac{\frac{y-2}{y^2-4y+4}}{\frac{y^2+2y}{y^2+4y+4}} = \dfrac{\frac{y-2}{(y-2)^2}}{\frac{y(y+2)}{(y+2)^2}} = \dfrac{y-2}{(y-2)^2}\cdot\dfrac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \dfrac{y+2}{(y-2)y}$.

d) $\dfrac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}} = \dfrac{\frac{u^2-1}{u}}{\frac{u^2-1}{u^2}} = \dfrac{u^2-1}{u}\cdot\dfrac{u^2}{u^2-1} = u$.

e) $\dfrac{x-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x}{1-x}} = \dfrac{x-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}} = \dfrac{\frac{x(x-1)}{x-1}-\frac{x}{x-1}}{\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)}} = \dfrac{x(x-2)}{x-1}\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$
$= \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x}$.

f) $$\frac{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{y}}} = \frac{1-\dfrac{1}{\dfrac{y+x}{y}}}{1-\dfrac{1}{\dfrac{y-x}{y}}} = \frac{\dfrac{y+x}{y+x}-\dfrac{y}{y+x}}{\dfrac{y-x}{y-x}-\dfrac{y}{y-x}} = \frac{x}{y+x}\cdot\frac{y-x}{-x} = \frac{x-y}{x+y}.$$

g) $$\frac{\dfrac{4}{y}-y}{\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{4-y^2}{y}}{\dfrac{4-y^2}{2y^2}} = \frac{4-y^2}{y}\cdot\frac{2y^2}{4-y^2} = 2y.$$

Exercice 3. D'une part,

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\left(\frac{F(x)}{G(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}+\left(\frac{F(x)q(x)+p(x)G(x)}{G(x)q(x)}\right) = \frac{f(x)G(x)q(x)+F(x)q(x)g(x)+p(x)G(x)g(x)}{G(x)q(x)g(x)},$$

d'autre part,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{F(x)}{G(x)}\right)+\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)G(x)+g(x)F(x)}{g(x)G(x)}+\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)G(x)q(x)+g(x)F(x)q(x)+p(x)g(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)},$$

comme la multiplication des polynômes est *commutative*, on peut égaler les deux parties et obtenir le résultat.

Exercice 4. D'une part,

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{F(x)}{G(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{F(x)q(x)+p(x)G(x)}{G(x)q(x)}\right) = \frac{f(x)F(x)q(x)+f(x)p(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)},$$

et d'autre part,

$$\frac{f(x)}{g(x)}\frac{F(x)}{G(x)}+\frac{f(x)}{g(x)}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)F(x)q(x)+f(x)p(x)G(x)}{g(x)G(x)q(x)}.$$

On peut ainsi égaler les deux membres et l'énoncé est démontré.

Exercice 5. Vérifions tout d'abord que $(K(x),+)$ forme un groupe abélien :

- Le fait que l'addition est associative a été vérifié à l'Exercice 3.
- Vérifions que le polynôme nul $0 \in K(x)$ est l'élément neutre de l'addition :

  $$0+\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{1}+\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0\cdot g(x)}{g(x)}+\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0+f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)};$$

  de même, $\frac{f(x)}{g(x)}+0 = \frac{f(x)}{g(x)}$. Bien sûr, si l'on montre d'abord la commutativité de l'addition, cette dernière vérification est inutile.
- Toute fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ possède un inverse $\frac{-f(x)}{g(x)}$ pour l'addition (c'est-à-dire un opposé) :

  $$\frac{-f(x)}{g(x)}+\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = 0;$$

  de même, $\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)} = 0$. Ici aussi, si l'on a déjà montré que l'addition est commutative, cette dernière vérification est inutile.
- L'addition est commutative :

  $$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x)+p(x)g(x)}{g(x)q(x)}.$$

  et

  $$\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)g(x)+f(x)q(x)}{q(x)g(x)}.$$

  Ces deux fractions sont égales car l'addition *et* la multiplication dans $K[x]$ sont commutatives.

Vérifions maintenant que $(K(x)\setminus\{0\},\cdot)$ forme un groupe abélien :

- La multiplication est associative : on a
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{p(x)}{q(x)}\right)\cdot\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{f(x)p(x)}{g(x)q(x)}\cdot\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{(f(x)p(x))r(x)}{(g(x)q(x))s(x)}$$
et
$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left(\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{r(x)}{s(x)}\right)=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}=\frac{f(x)(p(x)r(x))}{g(x)(q(x)s(x))}.$$
Les deux fractions de droite sont égales car la multiplication dans $K[x]$ est associative.
- Pour simplifier les vérifications de l'élément neutre et de l'inverse multiplicatifs, vérifions que la multiplication est commutative :
$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{f(x)p(x)}{g(x)q(x)}=\frac{p(x)f(x)}{q(x)g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}$$
car la multiplication de polynômes est commutative.
- Vérifions que le polynôme constant $1\in K(x)$ est l'élément neutre de la multiplication :
$$1\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{1}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1\cdot f(x)}{1\cdot g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}.$$
Par commutativitéde la multiplication, on a aussi $\frac{f(x)}{g(x)}\cdot 1=\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Toute fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ possède un inverse $\frac{g(x)}{f(x)}$ pour la multiplication :
$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{f(x)g(x)}{g(x)f(x)}=\frac{1}{1}=1$$
et par commutativité de la multiplication, $\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Ces égalités sont valables car la multiplication dans $K[x]$ est commutative.

Finalement, la distributivité de la mutliplication par rapport à l'addition a été montrée en partie à l'Exercice 4. L'autre partie (la multiplication d'une somme à droite), découle de la commutativité de la multiplication dans $K(x)$.

Exercice 6.

a) D'une part $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}}\cdot\dfrac{x+y+z}{xy+xz+yz}=\dfrac{\frac{yz+xz+xy}{xyz}}{\frac{z+y+x}{xyz}}\cdot\dfrac{x+y+z}{xy+xz+yz}=$
$\dfrac{yz+xz+xy}{xyz}\cdot\dfrac{xyz}{z+y+x}\cdot\dfrac{x+y+z}{xy+xz+yz}=1,$
et d'autre part $\dfrac{x+3y+5z}{\frac{5}{xy}+\frac{3}{xz}+\frac{1}{yz}}\cdot\dfrac{1}{xyz}=\dfrac{x+3y+5z}{\frac{5z+3y+x}{xyz}}\cdot\dfrac{1}{xyz}=\dfrac{x+3y+5z}{1}\cdot\dfrac{xyz}{5z+3y+x}\cdot\dfrac{1}{xyz}=1,$
ainsi l'égalité est démontrée.

b) D'une part $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(x+y+z)\dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=\dfrac{(x+y+z)(yz+xz+xy)}{xyz}=$
$\dfrac{xyz+x^2z+x^2y+y^2z+xyz+xy^2+yz^2+xz^2+xyz}{xyz},$
d'autre part
$\dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}+1=\dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)+xyz}{xyz}=\dfrac{(x+y)(xy+yz+xz+z^2)+xyz}{xyz}=$
$\dfrac{x^2y+xyz+x^2z+xz^2+xy^2+y^2z+xyz+yz^2+xyz}{xyz},$
en réorganisant les termes des deux côtés, l'égalité est démontrée.

Exercice 7.

a) Si $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ sont deux représentants de la même fraction rationnelle, alors $f_1(x)g_2(x)=f_2(x)g_1(x)$ ce qui implique que $\deg(f_1(x)g_2(x))=\deg(f_2(x)g_1(x))$. Comme le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de chacun de ces poylnômes, on en déduit que $\deg(f_1(x))+\deg(g_2(x))=\deg(f_2(x))+\deg(g_1(x))$ et donc que $\deg(f_1(x))-\deg(f_2(x))=\deg(g_1(x))-\deg(g_2(x))$. Cette dernière égalité prouve que $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ et $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ ont le même degré.

b) Par définition, le degré de $\frac{1}{x^n}$ est égal à $0 - n = -n$.

c) Montrons que

$$\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)}\right) \leq \max\left(\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{F(x)}{G(x)}\right)$$

et qu'il se peut que l'inégalité soit stricte.

Nous avons

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x)G(x) + F(x)g(x)}{g(x)G(x)}.$$

Alors

$$\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)}\right) = \deg\left(\frac{f(x)G(x) + F(x)g(x)}{g(x)G(x)}\right) = \deg(f(x)G(x) + F(x)g(x)) - \deg(g(x)G(x)).$$

En examinant le premier terme, on voit que l'on cherche le degré d'une somme de polynôme, celui-ci sera plus petit que le maximum des degrés de $f(x)G(x)$ ou $F(x)g(x)$. En effet, si $f(x)G(x) = a_n x^n + p(x)$ et $F(x)g(x) = b_m x^m + q(x)$ où $p(x)$ respectivement $q(x)$ sont des polynômes de degré plus petit ou égal à $n-1$, respectivement à $m-1$. Alors la somme sera $a_n x^n + b_m x^m + p(x) + q(x)$. Ainsi le degré de cette somme sera plus petit ou égal à $\max(m, n)$. Remarquons que l'égalité est fausse précisément lorsque $a_n x^n + b_m x^m = 0$ (c'est-à-dire si $m = n$ et $b_m = -a_n$), car alors $f(x)G(x) + F(x)g(x) = p(x) + q(x)$ sera de degré plus petit ou égal à $n - 1$ (ceci justifie que l'inégalité ci-dessous est stricte dans certains cas). En constatant encore que le degré d'un produit de polynôme est égal à la somme des degrés, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\deg(f(x)G(x) + F(x)g(x)) - \deg(g(x)G(x)) \\
&\qquad\leq \max(\deg(f(x)) + \deg(G(x)), \deg(F(x)) + \deg(g(x))) - \deg(g(x)) - \deg(G(x)) \\
&\qquad= \max(\deg(f(x)) - \deg(g(x)), \deg(F(x)) - \deg(G(x))) \\
&\qquad= \max\left(\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right), \deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)\right).
\end{aligned}$$

d) $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{F(x)}{G(x)}\right) = \deg\left(\frac{f(x)F(x)}{g(x)G(x)}\right) = \deg(f(x)F(x)) - \deg(g(x)G(x)) = \deg(f(x)) + \deg(F(x)) - \deg(g(x)) - \deg(G(x)) = \deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)$.

e) Faux. Si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x}$ est de degré $2 - 1 = 1$ mais $\frac{f(1)}{g(1)} = 2 \neq \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{2}$, ainsi $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas constante.