Série 19

Exercice 1. Où se trouve l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant ? J'affirme que dans une boîte de crayons de couleur tous les crayons ont la même couleur. Considérons donc pour un entier $k \geq 1$ la propriété $P(k)$: dans une boîte de k crayons, tous les crayons ont la même couleur.

Initialisation. Dans une boîte avec un seul crayon, tous les crayons ont évidemment la même couleur.

Hérédité. Supposons que $P(k)$ est vrai et considérons une boîte de $k+1$ crayons. Si j'en enlève un je me retrouve avec une boîte de k crayons, tous de la même couleur par hypothèse de récurrence. J'en enlève un autre, puis remets le premier crayon enlevé dans la boîte. À nouveau les k crayons de la boîte ont tous la même couleur. Par conséquent ils ont tous la même couleur et $P(k+1)$ est vérifiée !

Exercice 2. On rappelle que pour tout nombre entier naturel n, le nombre n *factorielle*, noté $n!$, est défini inductivement comme suit :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

a) Démontre que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Démontre que $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$.

c) Démontre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3. Binôme de Newton. Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on définit le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

a) Pour $n \geq 1$, calcule $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.

b) Montre que les coefficients binomiaux satisfont $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$.

c) À l'aide des points précédents et du cours de 1re année, démontre la *formule du binôme de Newton* :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } a, b \in \mathbb{R}.$$

d) Déduis que les coefficients binomiaux peuvent être utilisés pour déterminer de combien de façons différentes on peut choisir k éléments parmi n. Utilise ensuite ce résultat pour calculer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments (dans le cas où $a = b = 1$).

Exercice 4. Avec (ou sans(!)) tes notes de cours de 1re année, retrouve la formule donnant la somme des entiers de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) : $\sum_{k=1}^{n} k = \ldots$. Démontre ensuite par récurrence la formule suivante pour la somme *des cubes* des entiers de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

et conclus en donnant la relation qui lie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \qquad \text{et} \qquad 1 + 8 + 27 + \ldots + n^3.$$

Exercice 5. Calcule successivement la valeur de chacune des expressions

$$\frac{1}{1\cdot 2}\,, \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\,, \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\,, \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\,.$$

Conjecture ensuite une formule donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ puis démontre ta conjecture.

Exercice 6.

a) Effectue une étude de signe de la fonction f donnée par $f(x)=\frac{x\cdot(2x+1)}{x+1}-(x+1)$ et déduis qu'en particulier $\frac{x\cdot(2x+1)}{x+1}\geq x+1$ pour $x\in[2;+\infty[$.

b) Démontre que pour tout entier n plus grand ou égal à 2, l'inégalité $\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n > n$ est vraie.

Exercice 7. Démontre que pour tout n entier positif ou nul, 4^n+6n-1 est divisible par 9.

$*$ **Exercice 8.** Soient deux suites convergentes (x_n) et (y_n) avec $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. À l'aide de la définition de limite (avec ε), montre que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=x+y$$

Indication. Utilise la propriété des limites x et y avec le nombre réel $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$*$ **Exercice 9.** Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. On veut voir que si $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sqrt{a}$ sont définies, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$$

Pour cela, considère les deux cas suivants.

a) Montre que si $x_n\in\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

Indication. Pour évaluer $\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|$ connaissant $|x_n-a|$, amplifie(!) par le conjugué.

b) Montre que si $x_n\in\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $a=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

Exercice 10. Quelques manipulations avec ε. Dans chaque cas on demande de trouver pour une valeur de ε donnée, la valeur d'un entier N particulier tel que $|x_n-x|\leq\varepsilon$ lorsque $n\geq N$.

a) La suite (x_n) définie par $x_n=\dfrac{1}{n!}$ tend vers zéro. Lorsque $\varepsilon=1/100$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $|x_n-0|<1/100$ pour tout $n\geq N$.

b) La suite (x_n) définie par $x_n=\dfrac{3n}{4n+2}$ tend vers $3/4$. Lorsque $\varepsilon=1/100$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $|x_n-3/4|<1/100$ pour tout $n\geq N$.

c) La suite (x_n) définie par $x_n=\dfrac{2n^2}{n-1}$ pour $n\geq 2$ tend vers $+\infty$. Lorsque $a=1000$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $x_n\geq 1000$ pour tout $n\geq N$.

Exercice 11. En utilisant la définition de la limite, montre que

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{7n^2+n+5}=\frac{2}{7}$