Série 18

Exercice 1. On considère les 12 fonctions rationnelles $f_1, \ldots, f_{12}$ données comme suit :

$f_1(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2+1}$	$f_5(x) = \dfrac{2x}{x-7}$	$f_9(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2-4}$
$f_2(x) = -2x+5+\dfrac{1}{x+1}$	$f_6(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+10)}$	$f_{10}(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2+4}$
$f_3(x) = \dfrac{2x}{x+1}$	$f_7(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$	$f_{11}(x) = -2x+5+\dfrac{1}{x^2+5}$
$f_4(x) = \dfrac{1}{x-7}$	$f_8(x) = -2x+5+\dfrac{1}{x-5}$	$f_{12}(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$

Détermine de tête, parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	AV	**AH ou AO**		**AV**	**AH ou AO**
a)	$x=-1$	$y=0$	**g)**	$x=-1$	$y=2$
b)	$x=-1$ et $x=-10$	$y=2$	**h)**	aucune	$y=1$
c)	aucune	$y=2$	**i)**	$x=-1$	$y=-2x+5$
d)	$x=7$	$y=2$	**j)**	$x=7$	$y=0$
e)	$x=-2$ et $x=2$	$y=1$	**k)**	aucune	$y=-2x+5$
f)	$x=5$	$y=-2x+5$	**l)**	$x=-1$ et $x=-10$	$y=0$

Exercice 2. Détermine, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, les asymptotes et/ou "trous" de chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^n}{3x^3-2x-1}$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions f proposées, détermine :

- l'ensemble de définition, ainsi que le signe de f ;
- les équations des asymptotes, les coordonnées des "trous" éventuels ainsi que la position de la courbe par rapport à l'AO ;
- une bonne esquisse du graphe de f.

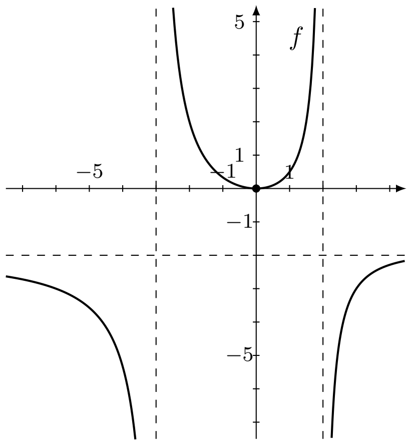
a) $f(x) = \dfrac{4x-x^3}{2x^2}$

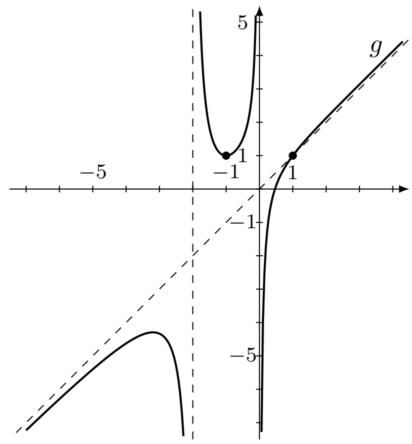
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^4}{(x-1)(x^2-1)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4+x}{x^3+x}$

Exercice 4. Détermine des fonction rationnelles f et g les plus simples possibles qui pourraient admettre les graphes suivants.





Exercice 5. [Incomplétude de $\mathbb{Q}$.] Démontre que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ possède un majorant dans $\mathbb{Q}$, mais que sa borne supérieure n'est pas dans $\mathbb{Q}$.
(L'objectif de cet exercice est de manipuler la définition de la borne supérieure donnée au cours, et de se convaincre que cette définition sert bien notre intuition.)

Indication. Utilise la proposition du cours qui garantit l'existence d'un nombre rationnel entre deux nombres réels différents.

$*$ **Exercice 6.** Démontre que tout intervalle ouvert (et non-vide) $]a; b[$ de $\mathbb{R}$ contient un nombre infini de nombre rationnels et un nombre infini de nombres irrationnels.

Exercice 7. Vrai ou faux ? Dans chaque cas donne une justification !

a) La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.

b) Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel.

c) La moyenne (arithmétique) de deux rationnels est rationnelle.

d) La moyenne (arithmétique) de deux irrationnels est irrationnelle.

e) La racine carrée d'un nombre entier premier est irrationnelle.

f) La racine cubique d'un nombre entier est irrationnelle.

Exercice 8. Démontre par récurrence que pour tout nombre réel $x \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Déduis-en que pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité suivante est vraie :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$$

Derrière cette inégalité se cache la clé pour comprendre le paradoxe de Zénon.

Exercice 9. Démontre par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.