IV. Applications linéaires

Le programme pour aujourd'hui est de continuer la discussion sur les bases d'un espace vectoriel, puis d'étudier les applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure à disposition, c'est-à-dire la somme et l'action.

1 Dimension

Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie, ce qui signifie que V admet une base finie. Pour pouvoir définir la notion de dimension, nous devons montrer que le nombre de vecteurs qu'il faut pour former une base ne varie pas d'une base à l'autre.

Proposition 1.1. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie.*
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de V, alors $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Démonstration. On a vu la semaine passée que le nombre d'éléments d'une partie libre de V est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'un système de générateurs.

B est libre et B' est un système de générateurs $\Rightarrow |B| \leq |B'|$

B' est libre et B est un système de générateurs $\Rightarrow |B'| \leq |B|$

Ainsi $|B| = |B'|$. □

La définition suivante a donc un sens.

Définition 1.2. Soit V un K-espace vectoriel.
La *dimension* de V sur K, notée $\dim_K(V)$ ou simplement $\dim V$, est le nombre d'éléments que contient une base de V.
Si V n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de V est infinie et alors, par définition, aucune de ses bases n'est finie.

Exemple 1.3.
Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou celui des suites de nombres complexes sont de dimension infinie. Par contre, $\dim \mathbb{R}^n = n$ car la base canonique contient exactement n vecteurs et l'espace vectoriel $\mathbb{F}_{23}[x]^{\leq n}$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans le corps à 23 éléments est de dimension n car $(1 ; x ; x^2 ; \ldots ; x^n)$ en est une base.

Clairement, si U est un sous-espace de V, $\dim U \leq \dim V$, puisqu'on peut compléter une base de U en une base de V. Ainsi, la dimension d'une somme de sous-espaces est plus grande ou égale à la dimension de chacun d'eux. Mais comment calcule-t-on explicitement cette dimension ?

Proposition 1.4. *Soient V un K-espace vectoriel et $U, W \subset V$ deux sous-espaces de V. Alors*

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$k+m+n = k+m + k+n - k$$

Démonstration. Nous devons comparer les tailles des bases des sous-espaces en jeu.
Pour faire cela, commençons par choisir une base $(v_1, \ldots, v_k)$ de l'intersection $U \cap W$.
C'est une famille libre de U que nous pouvons compléter en une base $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m)$ de U.
De même on construit une base $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_n)$ de W.

Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k ; u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ est une base de $U+W$

Il s'agit d'un système de générateurs car tout élément de $U+W$ s'écrit $u+w$ avec $u \in U$ et $w \in W$. Puisque u est combinaison linéaire des éléments v_i et des u_j et que w est combinaison linéaire des v_i et des w_l, on voit que $u+w \in <\mathcal{B}>$. Il reste à voir qu'il s'agit de vecteurs linéairement indépendants. Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0_V \qquad (*)$$

où les $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in K$. On récrit cette équation comme suit :

$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m}_{v \in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \cdots - \gamma_n w_n}_{v \in W}$$

Ainsi, $v \in U \cap W$, donc $v = \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - \cdots - \gamma_n w_n$.

$$\Longrightarrow \quad \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = 0$$

Or, $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_n)$ est une base de W par construction.
Donc c'est une famille libre !

Ainsi $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0$ et dans (*),

il reste $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$.

Or, $(v_1, \dots v_k, u_1, \dots, u_m)$ est une base de $V \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$ et $\beta_j = 0 \ \forall j$

Ainsi B est libre et génératrice. C'est bien une base de $U+W$. □

Exemple 1.5. Considérons dans $\mathbb{F}_2[x]^{\leq 3}$ les sous-espaces $U = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$ et $W = \mathbb{F}_2[x]^{\leq 2}$.

- U est formé des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx$
  $\Rightarrow B_U = (x^3 ; x^2 ; x)$ donc $\dim U = 3$
- W est formé des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$
  $\Rightarrow B_W = (1 ; x ; x^2)$ donc $\dim W = 3$
- $\dim(U+W) = 3 + 3 - 2 = 4$ et $B_{U+W} = (1 ; x ; x^2 ; x^3)$
- $\dim(U \cap W) = 2$ car $B_{U \cap W} = (x ; x^2)$.

2 La linéarité

Nous avons parlé dans ce module de groupes, d'anneaux, de corps et d'espaces vectoriels, mais nous n'avons pas encore appris à comparer les objets de chacune de ces classes entre eux. Ceci nous amène à la notion d'homomorphisme, du grec $o\mu o\varsigma$, semblable, et $\mu o\rho\varphi\eta$, forme.

Définition 2.1. Soient $(G, *)$ et $(H, \circ)$ deux groupes.
Un *homomorphisme* de groupes est une application $f : G \to H$ telle que $f(g * g') = f(g) \circ f(g')$.
Soient A et B deux anneaux. Un *homomorphisme* d'anneaux est une application $f : A \to B$ telle que $f(a \underset{A}{+} a') = f(a) \underset{B}{+} f(a')$, $f(a \underset{\cdot A}{} a') = f(a) \underset{\cdot B}{} f(a')$ et $f(1_A) = 1_B$.

Ainsi, en général, un homomorphisme, ou parfois simplement "morphisme", est une application qui préserve la structure à disposition. Le premier exemple qui vient à l'esprit est l'inclusion d'un sous-anneau. Par exemple, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneaux (injectif).

Exemple 2.2. Considérons l'application de réduction modulo p qui envoie un entier relatif sur sa classe de congruence modulo p. Ainsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est définie par $f(n) = [n]$.
Il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux (surjectif) par définition de la somme et du produit dans les entiers modulo p.

Il est naturel de définir maintenant un *homomorphisme d'espaces vectoriels* comme étant une application qui préserve la somme et l'action.

Définition 2.3. Soient K un corps, V et W deux K-espaces vectoriels.
Une *application* $(K\text{-})$ *linéaire* est une application $\alpha : V \to W$ telle que, $\forall v, v' \in V$ et $\forall \lambda \in K$,

- $\alpha(v + v') = \alpha(v) + \alpha(v')$;
- $\alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v)$. , $\lambda \in K$.

On note souvent $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de V vers W.
Lorsque $V = W$ on abrège en $\mathcal{L}(V)$.
On appelle *isomorphisme* une application linéaire bijective.

En particulier, on voit que $\alpha(0_V) = 0_W$, car , si $\lambda = 0_K$, $\alpha(0_V) = \alpha(0_K \cdot v) = 0_K \cdot \alpha(v) = 0_W$.

De nouveau, les exemples évidents qui nous viennent à l'esprit sont les inclusions de sous-espaces vectoriels, mais nous montrerons que des transformations du plan comme les rotations, symétries, homothéties et projections orthogonales sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Proposition 2.4. *Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire, $U \subset V$ et $Z \subset W$ des sous-espaces. Alors $\alpha(U)$ est un sous-espace de W et $\alpha^{-1}(Z)$ est un sous-espace de V.*

Démonstration. La première affirmation se fera en exercice.
Montrons simplement la deuxième affirmation à l'aide de notre critère favori.

- $\alpha(0_V) = 0_W \in Z$ donc $0_V \in \alpha^{-1}(Z)$ qui est donc non vide !
- Si $v, v' \in \alpha^{-1}(Z) \iff \alpha(v)$ et $\alpha(v') \in Z$.
  De plus $\alpha(v) + \alpha(v') \in Z$ et $\alpha(v) + \alpha(v') \underset{\alpha \text{ linéaire}}{=} \alpha(v + v') \implies v + v' \in \alpha^{-1}(Z)$
- Si $v \in \alpha^{-1}(Z)$ et $\lambda \in K$, alors $\alpha(v) \in Z$
  $\lambda\alpha(v) \in Z$ et $\lambda\alpha(v) = \alpha(\lambda v) \in Z$ □
  $\implies \lambda v \in \alpha^{-1}(Z)$.

Exemple 2.5. Considérons les espaces vectoriels $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{C}^4$.
Un exemple d'application $\mathbb{C}$-linéaire $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ est donné par

$$\alpha(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1 \,;\, z_1 - i z_2 + 24 z_3 \,;\, 0 \,;\, \tfrac{1}{2} i z_3\right)$$

(z_1, z_2, z_3).
Chacune des composantes de l'image doit être une combinaison linéaire de

Exemple 2.6. L'application $\beta : \mathbb{F}_7^3 \to \mathbb{F}_7$ définie par $\beta(a, b, c) = a + b - 3c + 1$ n'est pas linéaire car $\beta((0 ; 0 ; 0)) = 1 \neq 0$

3 Noyau, image et rang

Etant donné une application linéaire, deux sous-espaces importants nous aident à comprendre la signification géométrique de cette application.

Ker = Kern = "noyau"

Définition 3.1. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire.
Le *noyau* de α, noté $\mathrm{Ker}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha^{-1}(0) = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0_W\}$.
L'*image* de α, notée $\mathrm{Im}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } \alpha(v) = w\}$.
Le *rang* de α est la dimension de $\mathrm{Im}(\alpha)$.

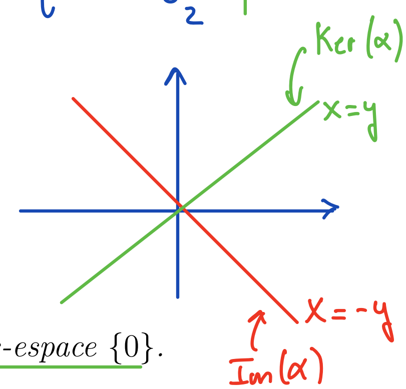
Exemple 3.2. Considérons l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha(x; y) = \left(\dfrac{x-y}{2}; \dfrac{y-x}{2}\right)$.
Calculons le noyau et l'image de cette application linéaire du plan.

- $\mathrm{Ker}(\alpha)$: $\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \iff x = y \implies \mathrm{Ker}(\alpha) = \langle (1;1) \rangle$

- $\mathrm{Im}(\alpha)$: tous les couples (u, v) t.q. $\exists\, x, y$ avec $\begin{cases} u = \frac{x-y}{2} & 1 \\ v = \frac{y-x}{2} & 1 \end{cases}$ $u + v = 0$

$\implies \mathrm{Im}(\alpha) = \langle (1;-1) \rangle$

En fait, α est la proj. orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur la droite $x = -y$



Proposition 3.3.
Une application linéaire est injective si et seulement son noyau est le sous-espace $\{0\}$.

Démonstration. Si $\alpha : V \to W$ est injective, alors le seul vecteur dont l'image est 0_W doit être 0_V, si bien que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$.
Réciproquement, si le noyau est nul, montrons que α est injective.

Soit $v, v' \in V$ tels que $\alpha(v) = \alpha(v')$

$\implies \alpha(v - v') \underset{\alpha \text{ linéaire}}{=} \alpha(v) - \alpha(v') = 0_W \implies v - v' \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$

$\implies v - v' = 0_V \implies v = v' \implies \alpha$ injective. □

Le théorème du rang explique la relation très forte qui existe entre les dimensions des sous-espaces vectoriels en jeu, celle du noyau et celle de l'image.

Théorème 3.4. du rang.
Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et supposons que V est de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim(\ker \alpha) + \operatorname{rang}(\alpha)$$

Démonstration. Puisque V est de dimension finie, le sous-espace $\operatorname{Ker}(\alpha)$ aussi. Choisissons une base $(v_1, \ldots, v_k)$ du noyau et complétons-la en une base de V tout entier, $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n)$. Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que l'image de α est un sous-espace de dimension n.

Considérons donc les vecteurs $\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_n)$ de l'espace vectoriel W. Nous allons montrer qu'ils forment une base de $\operatorname{Im}(\alpha)$.
En effet, si $w \in \operatorname{Im}(\alpha)$, il existe $v \in V$ tel que $\alpha(v) = w$. Ecrivons ce vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V$ que nous avons construite :

$$\begin{aligned} w = \alpha(v) &= \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n) \\ &= \lambda_1 \underbrace{\alpha(v_1)}_{=0_W} + \cdots + \lambda_k \underbrace{\alpha(v_k)}_{=0_W} + \mu_1 \alpha(u_1) + \cdots + \mu_n \alpha(u_n) \end{aligned}$$

α linéaire

où les coefficients λ_i et μ_j sont dans K. Ainsi, w est bien combinaison linéaire de vecteurs $\alpha(u_j)$. Il reste encore à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.
Considérons donc une combinaison linéaire nulle

α linéaire

$$0_W = \gamma_1 \alpha(u_1) + \cdots + \gamma_n \alpha(u_n) = \alpha(\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n).$$

Ainsi, le vecteur $\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n$ appartient à $\operatorname{Ker}(\alpha)$.

Donc $\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n = \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k$ car $(v_1, \ldots, v_k)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\alpha)$

$\Rightarrow \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n - \delta_1 v_1 - \cdots - \delta_k v_k = 0_V$

et comme $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k)$ est une base de V, la seule combinaison possible donne $\gamma_i = 0 \ \forall i$ et $\delta_j = 0 \ \forall j$.

Ainsi $\alpha(u_1), \ldots \alpha(u_n)$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im}(\alpha)$. □

Corollaire 3.5. *Soit V et W des K-espaces vectoriels.*
Alors, si $\dim V < \dim W$, il n'existe aucune application linéaire surjective $\alpha : V \to W$.

Corollaire 3.6. *Soit V et W des K-espaces vectoriels et $\alpha : V \to W$ une applicatin linéaire.*
Alors, si rang$(\alpha) = \dim W$, α est surjective.

Corollaire 3.7. *Soit V et W des K-espaces vectoriels de même dimension, finie. Alors une applicatin linéaire $\alpha : V \to W$ est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective.*

Démonstration.
Le théorème du rang nous dit que α est injective si et seulement si $\dim \mathrm{Im}(\alpha) = \dim V$.
Puisque $\dim V = \dim W$ ceci arrive exactement lorsque α est surjective. □

Exemple 3.8. Soit $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire.
Elle est donc de la forme $\alpha(z, z') = az + bz'$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
Lesquelles de ces applications sont surjectives, injectives, bijectives ?

Thm du rang : $2 = \dim(\mathbb{C}^2) = \dim \mathbb{C} + \dim \mathrm{Ker}(\alpha)$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$)

- $a = b = 0$, α est l'application nulle. $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathbb{C}^2 \neq \{(0;0)\}$
  $\Rightarrow$ α n'est ni injective, ni surjective.
- Sinon : $\mathrm{rang}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{rang}(\alpha) \leq 1 = \dim \mathbb{C}$
  donc $\mathrm{rang}(\alpha) = 1$ $\Rightarrow$ α est surjective.
  $\overset{\text{Thm rang}}{\Rightarrow}$ $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) = 1$ $\Rightarrow$ α n'est pas injective.
- Dans tous les cas, α n'est jamais bijective.

4 La matrice d'une application linéaire

Nous travaillons dans cette section avec deux K-espaces vectoriels V et W de dimensions finies, disons m et n respectivement. Nous aimerions mieux comprendre l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\alpha : V \to W$. Combien y en a-t-il ? Comment les représenter et travailler avec ? A quoi correspondent-elles dans la pratique ?

Définition 4.1. Une *matrice $n \times m$ à coefficients dans K* est un tableau, entouré de parenthèses, de n lignes et m colonnes dans lequel toutes les entrées sont des scalaires (de K) :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{m \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

1^{e} indice → n° ligne
2^{e} indice → n° colonne.

On note $M_{n\times m}(K)$ l'ensemble de toutes ces matrices.

On additionne les matrices de même taille coefficient par coefficient, si bien que $M_{n\times m}(K)$ est un groupe abélien. On le munit d'une action de K, coefficient par coefficient, qui en fait K-espace vectoriel.

Proposition 4.2. *L'espace vectoriel $M_{n\times m}(K)$ est de dimension $n \cdot m$.*

Démonstration. La base canonique de $M_{n\times m}(K)$ est formée des matrices e_{ij} avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1_K. □

Définition 4.3. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire.
On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de V et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de W. (dim $V = m$ et dim $W = n$
Soient a_{ij} les coefficients dans K des combinaisons linéaires, uniques, tels que $\alpha(e_j) = \sum a_{ij} f_i$. $= \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$

Alors la matrice $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ est la matrice de α dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Cette définition permet de construire une application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n\times m}(K)$.

Théorème 4.4. *L'application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n\times m}(K)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,* $\dim \mathcal{L}(V, W) = n \cdot m$.

Démonstration. Voyons d'abord pourquoi l'application T est linéaire.
Si α et β sont deux applications linéaires, alors $(\alpha+\beta)(e_i) = \alpha(e_i)+\beta(e_i)$, si bien que les coefficients de la matrice de $\alpha + \beta$ sont la somme de ceux des matrices de α et de β.
De même, $T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha)$ pour tout $\lambda \in K$.
De plus, l'application linéaire T est injective, car si $T(\alpha)$ est la matrice nulle, alors α est l'application nulle !

Enfin, T est aussi surjective car à toute matrice $(a_{ij})_{n\times m}$, on peut faire correspondre une application $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$ définie comme suit :

$\forall\, v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$ car $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m)$ est une base de V

On pose $\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} f_i$.

Ainsi, les composantes de $\alpha(v)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont les éléments de la matrice colonne $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ par définition du produit matriciel et α est clairement linéaire. □

Ainsi, une fois qu'on s'est fixé une base $\mathcal{B}_V$ de l'espace vectoriel de départ V et une base $\mathcal{B}_W$ de l'espace vectoriel d'arrivée W, la matrice d'une application se construit en plaçant dans les colonnes les composantes des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V$ relativement à la base $\mathcal{B}_W$.

Réciproquement, pour calculer l'image d'un vecteur $v \in V$ par une application linéaire dont on nous donne seulement la matrice, il faut exprimer le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m)$, écrire ses composantes dans un vecteur colonne et multiplier ce vecteur à droite par A pour obtenir les composantes de $\alpha(v)$ relativement à $\mathcal{B}_W = (f_1, \dots, f_n)$:

$$v = \sum \lambda_j e_j \qquad \Rightarrow \qquad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj}\lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(v) = \sum \mu f_i$$

Exemple 4.5. Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Alors l'image du point $(1; 1)$ est donné par

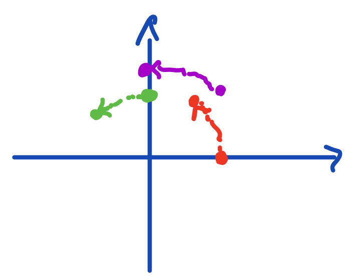
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de $e_1 = (1; 0)$ est

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

l'image de $e_2 = (0; 1)$ est

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Géométriquement, A est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre O.