Corrigé série 15

Exercice 1 (10 points)

a) Oui

b) Non, comme la multiplication scalaire “sort” de V. Par exemple, $1 \in V$ et $2 \in K$, mais

$$2 \cdot 1 = 2 \notin V.$$

c) Oui

d) Oui

e) Oui

f) Non. Si $f, g \in V$, alors $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = 2$.

g) Oui

Exercice 2 (5 points)

On définit l'addition, pour $a_i, b_i \in V_i$ avec $i = 1, \ldots, n$, par

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

et la multiplication, pour $\lambda \in K$, par

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

Dans le cas $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{F}_2$, on peut voir le produit $V_1 \times V_2 \times V_3$ comme les sommets d'un cube de dimension 3.

Exercice 3 (10 points)

a) Oui. La fonction nulle est dérivable, la somme de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, et si f est dérivable, alors $\lambda \cdot f$ est dérivable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Non. Si $f, g \in W$, alors $(f+g)(\pi) = 2e \neq e$.

c) Oui. La fonction nulle est bornée, la somme de deux fonctions bornées est une fonction bornée, et la multiplication par un scalaire d'une fonction bornée est une fonction bornée.

d) Oui. Le triple $(0;0;0)$ satisfait la condition. Si $x+2y+ez=0$ et $x'+2y'+ez'=0$ pour $x,y,z,x',y',z'\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(x+x')+2(y+y')+e(z+z') &= (x+2y+ez)+(x'+2y'+ez')\\ &= 0+0=0,\end{aligned}$$

et, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda x+2\lambda y+e\lambda z=\lambda(x+2y+ez)=\lambda 0=0.$$

e) Non. Considérons $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ qui sont deux éléments de l'ensemble W. Cependant, leur somme $(1,1,1)$ ne l'est pas.

Exercice 4 (5 points)

On a, pour $r,a,b\in\mathbb{R}$,

$$r\cdot(a+bi)=(ra)+(rb)i.$$

Comme $\mathbb{R}$ est non-vide stable par multiplication réelle et par addition, c'est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. On peut choisir $(1,i)$ comme $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$.

Exercice 5 (10 points)

a) Faux. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie. En effet, on peut exhiber facilement un ensemble infini $\{f_n\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid n\in\mathbb{N}\}$ de vecteurs linéairement indépendants en définissant pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

b) Faux. On remarque que $\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le “cube” étudié dans l'exercice est un autre contre-exemple.

c) Vrai. Si $x_1,\ldots,x_m$ génère V, alors on peut retirer des vecteurs de la liste

$$x_1,\ldots,x_m$$

tant que la liste est linéairement dépendante, sans changer l'espace qu'elle engendre. À la fin, on obtient une liste linéairement indépendante.

d) Faux. Poser $x=1$ et $y=0$. Alors, dans $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, x et y sont linéairement dépendants, mais x n'est pas un multiple de y.

e) Faux. Poser $x=y=z$. Alors x,y,z sont linéairement dépendants, mais ils n'engendrent qu'une ligne.

Exercice 6 (10 points)

a) On rappelle qu'un polynôme $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$ possède au plus n racines [1].
S'il existe des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_n \cos^n(x) = 0, \quad \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R},$$

alors le polynôme

$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$$

possède une infinité de racines : poser $X := \cos(x)$ conduit à une solution pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, nous savons qu'un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}_{>0}$ ne peut pas avoir plus de m racines, ainsi de tels coefficients λ_i ne peuvent pas exister, en dehors des coefficients triviaux

$$\lambda_i = 0 \quad \text{pour tout } \ i = 0, \ldots, n.$$

b) Par induction : supposons que pour tout $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ on ait l'implication

$$\begin{gathered}\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_n \cos(nx) = 0, \quad \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \lambda_i = 0 \ \text{ pour tout } \ i = 0, \ldots, n.\end{gathered}$$

Pour faire le pas d'induction, supposons qu'il existe des coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \cdots + \lambda_n \cos(nx) + \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0, \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant deux fois cette équation, on obtient

$$-\lambda_1 \cos(x) - 4\lambda_2 \cos(2x) - \cdots - n^2 \lambda_n \cos(nx) - (n+1)^2 \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0, \tag{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On combine maintenant ces deux équations membre à membre de la manière suivante

$$(n+1)^2 \cdot (1) + (2)$$

pour avoir

$$\begin{aligned}(n+1)^2 \lambda_0 + \lambda_1(-1 + (n+1)^2) \cos(x) + \lambda_2(-4 + (n+1)^2) \cos(2x) \\ + \cdots + \lambda_n(-n^2 + (n+1)^2) \cos(nx) = 0,\end{aligned}$$

1. C'est une conséquence du fait que si $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ a pour racine α, alors $f(X)$ est divisible par $(X - \alpha)$. Ainsi, on peut écrire

$$f(X) = (X - \alpha) \cdot g(X),$$

où $g(X)$ est un polynôme de degré $n-1$; et on remarque que si $f(X)$ a N racines, alors $g(X)$ aura au moins $N-1$ racines. Par induction, on peut supposer que $g(X)$ a au plus $n-1$ racines (comme il est de degré $n-1$), ce qui nous permet de conclure.

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par l'hypothèse d'induction, cette dernière équation implique

$$\begin{aligned}(n+1)^2\lambda_0 &= 0,\\ \lambda_1(-1+(n+1)^2) &= 0,\\ \lambda_2(-4+(n+1)^2) &= 0,\\ \vdots \quad & \quad \vdots\\ \lambda_n(-n^2+(n+1)^2) &= 0,\end{aligned}$$

donc $\lambda_i = 0$ pour $i = 0, \dots, n$. En revenant à l'équation initiale (1), on voit maintenant que $\lambda_{n+1} = 0$, ce qui établit l'induction.

Exercice 7 (10 points)

a) Les trois vérifications peuvent se faire par calculs directs. On le fait ici pour V : soient $u, v, u', v', \lambda \in \mathbb{F}_7$, alors

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+u' & v+v' \\ 0 & u+u' \end{pmatrix} \in V, \quad \text{et}$$
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u & \lambda v \\ 0 & \lambda u \end{pmatrix} \in V.$$

b) Pour U, on propose

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$$

pour V, on propose

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

et, pour W, on propose

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

c) Les trois sous-espaces $U \cap V$, $U \cap W$ et $V \cap W$ sont égaux et on peut les écrire comme

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{F}_7 \right\},$$

ayant donc pour base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 8 (5 points)
On va montrer que $U + U = U$. L'inclusion $U \subseteq U + U$ est immédiate, et l'inclusion $U + U \subseteq U$ est une conséquence du fait que U est stable par addition.

Exercice 9 (5 points)
On propose la liste
$$((3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1))\,.$$
Il est clair que ces trois vecteurs sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Pour voir qu'ils engendrent le sous-espace de $\mathbb{Q}^5$ considéré, choisissons
$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$$
tel que
$$x_1 = 3x_2, \quad \text{et} \quad x_3 = 7x_4.$$
Alors, ces deux conditions nous permettent de réécrire v comme
$$\begin{aligned} v &= (3x_2, x_2, 7x_4, x_4, x_5) \\ &= x_2(3,1,0,0,0) + x_4(0,0,7,1,0) + x_5(0,0,0,0,1). \end{aligned}$$

Exercice 10 (5 points)

a) On pose $nv := (n \cdot 1_K)v$, où la multiplication $\cdot$ est définie dans la donnée.

b) On a
$$\begin{aligned} n(\lambda v) &= (n \cdot 1_K)(\lambda v) = ((n \cdot 1_K)\lambda)v \\ &= ((1_K + \ldots 1_K)\lambda)v = (\lambda + \ldots + \lambda)v = (n\lambda)v. \end{aligned}$$

c) On a
$$\begin{aligned} n(\lambda v) &= (n \cdot 1_K)(\lambda v) = ((n \cdot 1_K)\lambda)v \\ &= (\lambda(n \cdot 1_K))v = \lambda((n \cdot 1_K)v) = \lambda(nv). \end{aligned}$$

d) Pour tout vecteur $v \neq 0_V$ et $\lambda \in K$, on a que $\lambda v = 0_V$ si et seulement si $\lambda = 0$. En effet, en raisonnant pas l'absurde, si $\lambda \neq 0$ alors il existe un inverse λ^{-1} et on a
$$v = 1_K v = \lambda^{-1}\lambda v = \lambda^{-1}0_V = 0_V.$$
Ainsi, $nv = 0_V$ si et seulement si $n \cdot 1_K = 0$. Or, $n \cdot 1_K = 0$ si et seulement si n est divisible par la caractéristique du corps K.

Exercice 11 (10 points)

a) $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $U \cap W = \{0\}$. Soit $u + w = u' + w' \in U + W$ avec $u, u' \in U$ et $w, w' \in W$. Alors

$$U \ni u - u' = w' - w \in W,$$

et donc, $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$. Ainsi, on a

$$u - u' = 0 \quad \text{et} \quad w' - w = 0,$$

ce qui montre l'unicité de l'écriture.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x \in U \cap W$. Alors $x = u + 0$ avec $u \in U$ et $0 \in W$ ou alors $x = 0 + w$ avec $0 \in U$ et $w \in W$.

L'unicité de la décomposition de x implique alors que $u = 0$ et $w = 0$.

Ainsi, $x = 0 + 0 = 0$. Donc $U \cap W = \{0\}$ et $U + W$ est une somme directe.

On peut également procéder par contraposition :

Si $U + W$ n'est pas une somme directe, alors $\exists v \neq 0$ dans $U \cap W$.

La décomposition de v comme somme d'un élément de U et d'un élément de V n'est pas unique car $v = v + 0$ avec $v \in U$ et $0 \in W$ ou alors avec $0 \in U$ et $v \in W$.

b) L'égalité $U_1 + U_2 + U_3 = V$ est immédiate, comme $U_1 + U_2 = V$ et $U_3 \subseteq V$.
Il est aussi immédiat que
— $U_1 \cap U_2 = 0,$ car pour $u \in U_1, z = 0$ et pour $u \in U_2, x = y = 0$
— $U_1 \cap U_3 = 0,$ car pour $u \in U_1, z = 0$ et pour $u \in U_3, x = 0$
— $U_1 \cap U_3 = 0 \quad \text{et} \quad U_2 \cap U_3 = 0.$

c) On considère dans $V = \mathbb{R}^3$ les sous-espaces
$U_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,
$U_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$,
$U_3 = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
On a bien $V = U_1 + U_2 + U_3$ et et $U_i \cap U_j = \{(0, 0, 0)\}$ si $i \neq j$.

d) Non, par exemple 0 s'écrit comme

$$0 = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1).$$

Exercice 12 (10 points)

a) Supposons que $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Clairement $U_i \cap U_j = \{0\}$ si $i \neq j$, car sinon l'écriture de 0 ne serait pas unique : par exemple si $x \in U_1 \cap U_2$, alors $-x \in U_1 \cap U_2$ comme $U_1 \cap U_2$ est un sous-espace vectoriel, et on peut écrire $0 \in V$ comme

$$0 + 0 = 0 = x + (-x).$$

En utilisant l'unicité de l'écriture, on doit alors avoir $x = 0$.

Pour la même raison, on doit avoir $(U_i + U_j) \cap U_k = \{0\}$ si i, j, k sont distincts. En effet, si $y \in (U_i + U_j) \cap U_k$, alors il existe $u_i \in U_i$ et $u_j \in U_j$ tels que

$$y = u_i + u_j,$$

et on a

$$0 + 0 + 0 = 0 = y + (-y) = u_i + u_j - y,$$

et l'unicité de l'écriture nous donne $-y = 0$.

Réciproquement, supposons que $x, x' \in U_1$, $y, y' \in U_2$ et $z, z' \in U_3$ soient tels que

$$x + y + z = x' + y' + z'.$$

Alors

$$(x - x') + (y - y') + (z - z') = 0.$$

On a, par cette dernière équation, $z - z' \in U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$, ainsi $z = z'$. Donc

$$(x - x') + (y - y') = 0,$$

d'où $y - y' \in U_2 \cap U_1 = \{0\}$, ainsi $y = y'$. On obtient finalement aussi $x = x'$.

b) Supposons que 0 s'écrive de manière unique et soient

$$u_1 + \ldots + u_n = u_1' + \ldots + u_n'$$

avec $u_i, u_i' \in U_i$. Alors

$$(u_1 - u_1') + \ldots + (u_n - u_n') = 0,$$

et donc $u_i = u_i'$ pour tout i.