

Nom: _____ Prénom: _____

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Problème 1. (8 points)

Soit D l'ensemble de toutes les fonctions réelles dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f'(0) = f'(1)$, muni de la somme et du produit usuels $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

a) Pourquoi D n'est-il pas un anneau commutatif avec la seule condition $f'(0) = f'(1)$?

Propositions deux conditions différentes à ajouter pour qu'il le soit.

b) Avec l'une des conditions ajoutées, D est-il un corps ? Justifier la réponse

Problème 2. (20 points)

a) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = -2iz - 1 + 2i$

b) Ecrire l'équation dans \mathbb{C} de la composition de l'homothétie de centre $5 + 3i$ et de rapport 2 suivie de la rotation d'angle π de centre O . Caractériser géométriquement cette similitude.

c) Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du segment reliant $A = (-1; -1)$ et $B = (1; 1)$, privé de l'origine O .

d) Déterminer la représentation graphique de l'équation $z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) - 5 = 0$.

Problème 3. (12 points)

On considère $X = \{a, b\}$ l'ensemble constitué de deux éléments a et b .

a) Décrire $\mathcal{P}(X)$ et écrire la table de la loi de composition de la différence symétrique Δ .

b) En déduire que la Δ admet un élément neutre et donner cet élément neutre.

c) Montrer que tout sous-ensemble $A \subset X$ admet un inverse pour Δ et donner cet inverse.

d) Calculer la différence symétrique d'un ensemble A et de son complémentaire $X - A$.

Problème 4. (11 points)

Un chanteur peu connu a sorti une nouvelle chanson sur une plateforme musicale.

On modélise le nombre d'écoutes quotidiennes N de cette chanson en fonction du nombre de jours x écoulés depuis que la chanson est disponible par :

$$N(x) = x^3 \cdot e^{-0,02x} \quad \text{avec } x \geq 1$$

a) Après combien de jours le nombre d'écoutes est-t-il maximal ?
Combien y a-t-il d'écoutes ce jour-là ?

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)$ et interpréter le résultat dans le contexte.

Problème 5. (4 points)

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Problème 6. (8 points)

Soit V un K -espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

Montrer que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.