

---

**Test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algébriques**15.01.25

---

Nom: \_\_\_\_\_ Prénom: \_\_\_\_\_

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier.  
Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

**Problème 1. (8 points)**

Soit  $D$  l'ensemble de toutes les fonctions réelles dérивables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f'(0) = f'(1)$ , muni de la somme et du produit usuels  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  et  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ .

- Pourquoi  $D$  n'est-il pas un anneau commutatif avec la seule condition  $f'(0) = f'(1)$ ?  
Proposer deux conditions différentes à ajouter pour qu'il le soit.
- Avec l'une des conditions ajoutées,  $D$  est-il un corps? Justifier la réponse

**Problème 2. (20 points)**

- Caractériser géométriquement la similitude d'équation  $f(z) = -2iz - 1 + 2i$
- Ecrire l'équation dans  $\mathbb{C}$  de la composition de l'homothétie de centre  $5 + 3i$  et de rapport 2 suivie de la rotation d'angle  $\pi$  de centre  $O$ . Caractériser géométriquement cette similitude.
- Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du segment reliant  $A = (-1; -1)$  et  $B = (1; 1)$ , privé de l'origine  $O$ .
- Déterminer la représentation graphique de l'équation  $z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) - 5 = 0$ .

**Problème 3. (12 points)**

On considère  $X = \{a, b\}$  l'ensemble constitué de deux éléments  $a$  et  $b$ .

- Décrire  $\mathcal{P}(X)$  et écrire la table de la loi de composition de la différence symétrique  $\Delta$ .
- En déduire que la  $\Delta$  admet un élément neutre et donner cet élément neutre.
- Montrer que tout sous-ensemble  $A \subset X$  admet un inverse pour  $\Delta$  et donner cet inverse.
- Calculer la différence symétrique d'un ensemble  $A$  et de son complémentaire  $X - A$ .

**Problème 4. (11 points)**

Un chanteur peu connu a sorti une nouvelle chanson sur une plateforme musicale.

On modélise le nombre d'écoutes quotidiennes  $N$  de cette chanson en fonction du nombre de jours  $x$  écoulés depuis que la chanson est disponible par :

$$N(x) = x^3 \cdot e^{-0,02x} \quad \text{avec } x \geq 1$$

a) Après combien de jours le nombre d'écoutes est-t-il maximal ?

Combien y a-t-il d'écoutes ce jour-là ?

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)$  et interpréter le résultat dans le contexte.

**Problème 5. (4 points)**

Soit  $K$  un corps et  $x, y \in K$ . Montrer que si  $xy = 0$ , alors soit  $x = 0$ , soit  $y = 0$ .

**Problème 6. (8 points)**

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $U$  et  $W$  des sous-espaces tels que  $U + W = V$ .

Montrer que  $U + W$  est une somme directe si et seulement si tout vecteur  $x \in V$  s'écrit de manière unique  $x = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ .