Rappel : K est un corps si c'est un anneau commutatif t.q $e_+ = 0 \neq 1 = e_\cdot$ et tout élément $\neq 0$ est inversible pour la multiplication.

III. Espaces vectoriels

Nous savons donc ce qu'est un corps, et nous en avons une bonne brochette à disposition en cas de besoin : non seulement $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais aussi les corps $\mathbb{F}_p$ de p éléments, pour tout p premier. Nous allons maintenant développer la théorie des espaces vectoriels sur un corps K, c'est-à-dire des droites, plans, espaces, hyper-espaces construits sur K, où l'on peut additionner les "vecteurs" entre eux et les multiplier par des scalaires de K, tout comme vous l'avez fait pour les classes d'équivalence de flèches dans le plan réel et l'espace réel.

1 Définition et propriétés élémentaires

Soit K un corps. On note 0_K le zéro, l'élément neutre additif, et 1_K l'unité, l'élément neutre multiplicatif, de K. Ce corps est souvent appelé le *corps de base* des K-espaces vectoriels que nous sommes sur le point de définir.

Définition 1.1. Un *espace vectoriel* sur K ou K*-espace vectoriel* est un groupe abélien $(V, +)$, noté additivement, muni d'une *action* de K, c'est-à-dire une application $K \times V \to V$ notée multiplicativement $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, de sorte que : $\forall\, v, w \in V$ et $\forall\, \mu, \lambda \in K$

a) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ (associativité de l'action)

b) $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v$ et $\lambda\,(v + w) = \lambda v + \lambda w$

c) $1_K \cdot v = v$

On appelle *vecteurs* les éléments de V et *scalaires* les éléments de K.

b) distributivité de l'action et de l'addition dans K ou dans V.

Voici quelques propriétés élémentaires, valides dans tous les espaces vectoriels.

Lemme 1.2. *Soient* $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ *et* $v, v_1, \ldots, v_m \in V$. *Alors :*

a) $0_K \cdot v = 0_V = \lambda \cdot 0_V$;

b) $(-\lambda)v = -\lambda v = \lambda(-v)$;

c) $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} v_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i v_j\right)$.

Démonstration.

a) On écrit $0_K = 0_K + 0_K$ et on conclut comme la semaine passée. On fait de même en partant de $0_V = 0_V + 0_V$.

b) On calcule par exemple $(-\lambda)v + \lambda v \overset{b)}{=} (-\lambda + \lambda)v \overset{\text{calcul dans } K}{=} 0_K \cdot v \underset{a)}{=} 0_V$, si bien que $(-\lambda)v = -\lambda v$.

c) Découle de la distributivité et se montre par récurrence sur m et sur n.

Si $m = n = 2$ $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (v_1 + v_2) \underset{\text{distrib}}{=} \lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_1 + v_2) \underset{\text{distrib bis.}}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2$ □

Commençons par les exemples évidents.

Exemple 1.3. Tout ensemble contenant uniquement l'élément nul d'un corps K est un espace vectoriel sur K. On parle de l'espace vectoriel nul.

Exemple 1.4. Le corps K lui-même est toujours un espace vectoriel sur K. L'action est alors simplement la multiplication de K.

Exemple 1.5. Si V et W sont deux K-espaces vectoriels, on munit $V \times W$ de la structure d'espace vectoriel *produit*. La somme est $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ et l'action est définie par $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$. Ainsi le plan réel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les éléments sont les points définis par des paires $(a ; b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$, qu'on peut identifier aux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, classes d'équivalence de flèches joignant un point $(x ; y)$ au point $(x + a, y + b)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.6. Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X, K)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to K$. On définit l'addition "point par point" en posant $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$
et l'action en posant $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in X$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur K.

$f \in \mathcal{F}(X ; K)$ est identifiée au point $(f(x) ; f(y)) \in K \times K$

Lorsque $X = \{x, y\}$ est un ensemble de deux éléments, alors $\mathcal{F}(X, K)$ s'identifie à $K \times K$ puisqu'une application f est complètement déterminée par la donnée de deux images $f(x)$ et $f(y)$. En revanche, lorsque X est un ensemble infini, cet espace vectoriel devient très grand !
Par exemple, lorsque $X = \mathbb{N}$, les applications $f : \mathbb{N} \to K$ sont toutes les suites dans K.
Lorsque X est encore plus grand, comme $\mathbb{R}$, on obtient en particulier l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions réelles, continues ou non !

2 Les sous-espaces vectoriels

Tout comme les groupes contiennent des sous-groupes et les anneaux contiennent des sous-anneaux, les espaces vectoriels contiennent des sous-espaces vectoriels. Tout juste après la définition, nous verrons un critère qui permet de les reconnaître.

Définition 2.1. Soit V un K-espace vectoriel.
Un sous-ensemble non-vide $W \subset V$ est un *sous-espace vectoriel* de V si l'addition et l'action de V se restreignent à W et le munissent d'une structure de K-espace vectoriel.

Exemple 2.2. Considérons $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des triplets (a, b, c) de nombres réels.
Soit le sous-ensemble $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car

- $(0 ; 0 ; 0) \in W$ puisque $0 + 0 + 0 = 0$
- $(a ; b , c) , (a' , b' , c') \in W$ alors $(a+a' ; b+b' ; c+c') \in W$
  puisque $(a+a') + (b+b') + (c+c') = (a+b+c) + (a'+b'+c') = 0+0=0$.
- si $(a, b, c) \in W$, alors $\lambda(a, b, c) \in W$ puisque
  $\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a+b+c) = \lambda \cdot 0 = 0$.

$\Rightarrow$ l'addition et l'action sont internes à W et $(W ; +)$ est un groupe abélien puisque $(\mathbb{R}^3 ; +) \supset (W ; +)$ l'est.

Cet exemple indique qu'il y a en général peu d'éléments à vérifier pour voir si un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel.

Proposition 2.3. *Soit V un K-espace vectoriel et $W \subset V$. Alors W est un sous-espace de V si et seulement si*

a) $0 \in W$;

b) $x + y \in W$ *pour tous* $x, y \in W$;

c) $\lambda x \in W$ *pour tous* $\lambda \in K$ *et* $x \in W$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Les trois conditions sont clairement nécessaires car W doit être muni d'une somme avec élément neutre et d'une action. $\boxed{\Leftarrow}$ Montrons qu'elles sont suffisantes.

- $W \neq \emptyset$ car $0 \in W$
- $(W ; +)$ est un groupe abélien par la propriété b) et la propriété c) qui nous garantit un opposé pour tout x avec $\lambda = -1$.
- L'associativité et la distributivité et le fait que $1_K w = w$ s'hérite de $V \supset W$.

□

Exemple 2.4. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions réelles. Alors les sous-ensembles suivants sont tous des sous-espaces vectoriels réels :

a) Les fonctions polynômiales.

b) Les fonctions dérivables.

c) Les fonctions constantes

d) Les fonctions trigonométriques.

Les opérations ensemblistes d'intersection et d'union se comportent de manière distincte par rapport à la structure d'espace vectoriel.

Lemme 2.5. *Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.* $\bigcap$

Démonstration. On veut montrer que les trois propriétés de la proposition sont vérifiées.

(i) Si $0 \in W_i$ pour une famille $W_i \subset V$ de sous-espaces, alors $0 \in \bigcap W_i$.

(ii) Si $x, y \in \bigcap W_i$, alors $x, y \in W_i$ pour tout i. Comme tous les W_i sont des sous-espaces vectoriels, on a que $x + y \in W_i$ pour tout i, donc $x + y \in \bigcap W_i$.

(iii) Si $x \in \bigcap W_i$ et $\lambda \in K \Rightarrow x \in W_i$ pour tout $i \Rightarrow \lambda x \in W_i$ pour tout $i \Rightarrow \lambda x \in \bigcap W_i$.

□

En revanche, la réunion de deux sous-espaces n'est pas un sous-espace en général.
Dans $(\mathbb{F}_2)^2$, les sous-ensembles $W_1 = \{(0,0),(0,1)\}$ et $W_2 = \{(0,0),(1,0)\}$ sont des sous-espaces, mais pas la réunion puisque $W_1 \cup W_2 = \{(0;0);(0;1);(1;0)\}$ et

$$(0;1)+(1;0) = (1;1) \notin W_1 \cup W_2$$

Il vaut mieux travailler avec la *somme* $W_1 + W_2 = \{x + y \mid x \in W_1, y \in W_2\}$.
Si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, on dit que la somme $W_1 + W_2$ est *directe* et on note alors $W_1 \oplus W_2$.

dans l'exemple, $W_1 \cap W_2 = \{(0;0)\}$ donc on a une somme directe $W_1 \oplus W_2 = (\mathbb{F}_2)^2$

Lemme 2.6. *Soit V un K-espace vectoriel.*
La somme de sous-espaces vectoriels de V est un sous-espace vectoriel de V.

3 Combinaisons linéaires

Vous avez déjà aperçu l'importance des combinaisons linéaires l'année passée lorsque vous avez brièvement parlé des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Nous travaillons ici avec un K-espace vectoriel V.

Définition 3.1. Soit $S \subset V$.
On note $< S >$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de V qui contiennent S.
On appelle S un *système de générateurs* de $< S >$ et on dit que S *engendre* $< S >$.
Lorsque $S = \{x\}$, on note aussi $Kx =< \{x\} >$.

Le sous-espace $< S >$ est le plus petit sous-espace de V qui contient S.
Explicitement, les éléments de $< S >$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de S.

Définition 3.2. Soit $S \subset V$. On dit que $x \in V$ est une *combinaison linéaire* d'éléments de S s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ et des vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in S$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Proposition 3.3. *Soit $S \subset V$.*
Alors $< S >$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S.

Démonstration. Appelons W l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S.

$\langle S \rangle \subset W$: W est un SEV(*) de V car $0 \in W$ (avec la CL(*) nulle) et la somme de deux C.L d'éléments de S est une C.L d'éléments de S et tout multiple d'une C.L d'éléments de S est une C.L. d'éléments de S. Ainsi $\langle S \rangle \subset W$.

$W \subset \langle S \rangle$: Soit U un SEV de V qui contient les éléments de $S \subset U$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S \subset U$, alors par prop 2.3, tout produit $\lambda_i x_i \in U$ et $\sum \lambda_i x_i \in U \Rightarrow W \subset U$, $\forall$ SEV $U \supset S$.
$\Rightarrow W \subset \langle S \rangle$. □

(*) SEV = Sous-Espace Vectoriel et CL = Combinaison Linéaire

Remarque 3.4. Soient W_1, W_2 des sous-espaces de V. Alors $W_1 + W_2 = < W_1 \cup W_2 >$.

Définition 3.5. Soient $x_1, \ldots, x_n \in V$. On dit que ces vecteurs sont *linéairement indépendants* ou *libres* si l'unique suite de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

est donnée par $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Si ce n'est pas le cas, on dit qu'ils sont *linéairement dépendants* ou *liés*.

Aucun vecteur d'une suite libre ne peut être nul, car, si $x_1 = 0_V$,

$$1_K \cdot \underbrace{x_1}_{=0_V} + 0_K x_2 + 0_K x_3 + \cdots + 0_K x_n = 0_V$$

Tout ensemble contenant un unique élément non nul est forcément libre. $\rightarrow \lambda x = 0$ avec $x \neq 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K$
Par convention, l'ensemble vide est libre.

Exemple 3.6.
Dans $\mathbb{C}^2$, les éléments $x_1 = (1; i)$ et $x_2 = (1 + i; i - 1)$ sont linéairement dépendants car
$(1+i)x_1 = (1+i)\cdot(1;i) = (1+i\,;\,i-1) = x_2 \Rightarrow (1+i)x_1 - x_2 = (0;0)$
Les éléments $y_1 = (1; i)$ et $y_2 = (i; 1)$ sont libres car

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta i = 0 & \Big| \; -i \\ \alpha \cdot i + \beta \cdot 1 = 0 & \Big| \; 1 \end{cases}$$

$$-\beta i^2 + \beta = 0 \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha \cdot 1 + 0 i = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

4 Bases

Les "meilleurs" systèmes de générateurs d'un espace vectoriel sont les plus petits.
Ceci nous conduit à définir ce qu'est une base d'un K-espace vectoriel V.

Définition 4.1. Une *base* de V est un sous-ensemble ordonné et libre $\mathcal{B} \subset V$ qui engendre V.
Si V admet une base finie, on dit que V est de *dimension finie*.
On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base formée des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ car l'ordre des éléments compte.

Exemple 4.2. Soit $V = K^n$. La *base canonique* de K^n est composée des n vecteurs
$e_1 = (1_K; 0_K; \ldots; 0_K), e_2 = (0_K; 1_K; 0_K, \ldots; 0_K), \;\ldots\;, e_n = (0_K; \ldots; 0_K; 1_K)$.
Ces vecteurs sont visiblement linéairement indépendants.
Ils engendrent K^n car $(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.

Le lemme suivant explique comment enlever un vecteur "en trop" d'une famille liée.

Lemme 4.3. de dépendance linéaire.
Si $x_1, \dots, x_m$ sont linéairement dépendants et $x_1 \neq 0_V$, il existe $2 \leq j \leq m$ tel que $x_j \in \langle x_1, \dots, x_{j-1} \rangle$ et les vecteurs $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ engendrent $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

Démonstration. Par dépendance linéaire, il existe une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_m x_m = 0_V$ où les λ_i ne sont pas tous nuls.
Puisque $x_1 \neq 0_V$, il existe $j \geq 2$ tel que $\lambda_j \neq 0_K$. Choisissons le plus grand j qui vérifie cela. (t.q. $\lambda_j \neq 0$)
En multipliant par l'inverse de λ_j et en isolant x_j, nous obtenons

$$x_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} x_2 - \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} x_{j-1} \qquad (\lambda_{j+1} = \dots = \lambda_n = 0)$$

ce qui conclut la preuve de la première assertion. Pour montrer la seconde, il suffit de remarquer que toute combinaison linéaire $\mu_1 x_1 + \mu_j x_j + \mu_m x_m$ peut aussi s'écrire, en remplaçant x_j par l'expression ci-dessus,

$$\left(\mu_1 - \mu_j \frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right) x_1 + \dots + \left(\mu_{j-1} - \mu_j \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right) x_{j-1} + \mu_{j+1} x_{j+1} + \dots + \mu_m x_m$$

□

Le lemme de dépendance linéaire permet d'extraire une base de chaque système de générateurs.

Théorème 4.4. *Soit $x_1, \dots, x_m$ un système de générateurs de V.*
Alors il existe des indices $1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m$ tels que $(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$ forme une base de V.

Démonstration. Si les vecteurs sont linéairement indépendants, il n'y a rien à faire, ils forment déjà une base. Si $x_1 = 0_V$, nous éliminons x_1 de la liste. Sinon, nous appliquons le Lemme de dépendance linéaire et éliminons x_j pour l'indice j décrit dans le lemme.
Nous continuons ensuite ce processus et nous arrêtons lorsque les vecteurs restants sont libres. □

Exemple 4.5. Soient $(1;2), (3;6), (4;7)$ et $(5;9)$ des vecteurs de $\mathbb{Q}^2$.
Ils sont linéairement dépendants puisque par exemple

$$3(1;2) - (3;6) = (0,0)$$

$\Rightarrow$ On élimine $(3;6)$. Restent $(1;2)$; $(4;7)$ et $(5;9)$. Mais,

$$(1;2) + (4;7) - (5;9) = (0;0) \Rightarrow \text{On élimine } (5;9)$$

Il reste $(1;2)$ et $(4;7)$ qui sont libres et forment une base de $\mathbb{Q}^2$.

Voyons maintenant que toute partie libre de V peut être complétée en une base.

Théorème 4.6. de la base incomplète.
Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie, $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants et $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ un système de générateurs de V.
Alors Il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $L \subset \mathcal{B} \subset L \cup S$.

Démonstration. Considérons les vecteurs $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$. C'est un système de générateurs. On peut donc appliquer le théorème précédent pour en extraire une base.
Puisque $x_1, \dots, x_k$ est libre, la méthode d'élimination laisse intacte les k premiers vecteurs. $\square$

Dans l'optique de définir la dimension d'un espace vectoriel, nous terminons cette section en montrant qu'une famille libre ne peut pas avoir plus de vecteurs qu'un système de générateurs.

Proposition 4.7. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ une partie libre et $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ un système de générateurs. Alors $k \leq m$.*

Démonstration.
S est un système de générateurs $\Rightarrow$ $S_1 = \{x_1, y_1, \dots, y_m\}$ est liée car $x_1 = \sum \lambda_i y_i$
Or $x_1 \neq 0$ car il appartient à L qui est libre.
On applique donc le lemme 4.3 de dépendance linéaire qui élimine un des y_j tout en maintenant un système de générateur S_2 qui contient x_1.
On ajoute alors x_2 en 2e position dans S_2 et on réitère l'élimination d'un y_j.
On répète l'opération k fois pour placer tous les x_i dans S_{k+1}
Finalement, on obtient un système de générateurs de la forme $\{x_1, \dots, x_k, y_{a_1}, \dots, y_{a_{m-k}}\}$ qui contient toujours m éléments. En effet, la méthode du lemme laisse intact les premiers vecteurs de la famille s'ils sont linéairement indépendants. et pour chaque vecteurs x_i ajouté, on a éliminé exactement un vecteurs y_j. On a donc bien enlevé k vecteurs de S, si bien que $k \leq m$.

$\square$