Série 14

Exercice 1. Calcule le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés sont de longueur $a = 24.9$, $b = 33.2$ et $c = 41.5$.

$*$ **Exercice 2. Résolution de triangles I.** Détermine le triangle ΔABC (les angles, les longueurs des côtés et l'aire) dans les cas suivants.

a) $\alpha = 43°, a = 10$ et $\beta = 102°$;
b) $a = 12, b = 20$ et $c = 9$;
c) $a = 13, b = 20$ et $\alpha = 32°$;
d) $a = 5, c = 19$ et $\alpha = 40°$;
e) $b = 20, c = 12$ et $\alpha = 57°$.

Exercice 3. Résolution de triangles II. Sans utiliser la machine, détermine le triangle ΔABC (les angles, les longueurs des côtés et l'aire) si l'on sait que $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 4. La formule de Héron. Héron d'Alexandrie a vécu au 1er siècle après J.-C. et on lui attribue la formule que nous allons démontrer ici et qui permet de calculer l'aire d'un triangle sans en connaître ni les angles, ni les hauteurs ! Soit donc un triangle ΔABC et σ son aire.

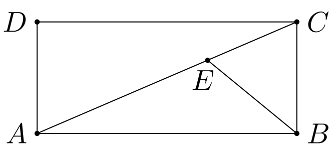
a) Le théorème de l'aire nous dit que $\sigma = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$. Utilise la relation $\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$ pour obtenir une expression de σ en fonction du cosinus de γ.
b) Utilise ensuite le Théorème du cosinus pour obtenir une expression de σ en fonction uniquement des longueurs des côtés a, b et c.
c) Simplifie l'expression que tu as trouvée en introduisant le demi-périmètre $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Montre que $\sigma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. C'est la formule de Héron.
d) Utilise la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle équilatéral de 10 cm de côté. Calcule cette aire d'une autre manière et compare tes résultats.
e) Utilise la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent $a = 12$, $b = 20$ et $c = 9$.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses.

a) Si $\cos(2x) = \sin(2x)$, alors $x = \frac{\pi}{8}$.
b) On considère un triangle dont les côtés sont de longueur 10, 10 et 20. Alors la formule de Héron donne que l'aire de ce triangle est nulle.
c) $\sin(3x) = \sin(x) \cdot (4\cos^2(x) - 1)$.

$*$ **Exercice 6.** Un bateau de pêche utilise un sonar pour détecter un banc de poissons situé à 3 km à l'est du bateau et suivant le cap N51°W (c'est-à-dire en direction du nord-ouest en faisant un angle de 51 degrés avec le nord) à la vitesse de 12 km/h. Si la vitesse du bateau est de 30 km/h, détermine son cap pour qu'il intercepte le banc et le temps en minutes nécessaire pour atteindre le banc.

Exercice 7. Sur la diagonale $[AC]$ d'un rectangle $ABCD$, on considère un point E tel que l'angle $\widehat{BEC} = 57°$. Sachant que $\overline{AB} = 36$ et $\overline{AE} = 24$, calcule la longueur $\overline{AD}$.



Exercice 8. Détermine le pgdc et le ppmc des nombres entiers suivants avec la méthode d'Euclide :

a) 3045 et 3451 ;

b) 23387 et 1285 ;

c) 241 et 56 ;

d) 10165 et 3745 ;

e) 1313 et 481.

Exercice 9. Simplifie les fractions $\frac{7375}{472}$, $\frac{241}{56}$ et $\frac{4998}{2737}$.

Exercice 10. Vrai ou faux ? Si $\text{pgdc}(a, b) = 1$ et $\text{pgdc}(b, c) = 1$, alors aussi $\text{pgdc}(a, c) = 1$. Justifie ta réponse.

Exercice 11. Vrai ou faux ? Si 2 divise $\text{pgdc}(a, b)$ et $\text{pgdc}(b, c)$, alors 2 divise aussi $\text{pgdc}(a, c)$. Justifie ta réponse.

Exercice 12. Soit p un nombre premier et a un nombre entier naturel quelconque. Donne toutes les possibilités des valeurs de $\text{pgdc}(a, p)$ et illustre-les par un exemple.

Exercice 13. Détermine le pgdc et le ppmc des polynômes suivants :

a) $3x(x + 2)$, $2x(x - 1)$ et $x^2 + x - 2$;

b) $x^2 - x$, $x^3 - 3x^2 + 2x$ et $x^3 - 4x^2 + 3x$;

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x^3 + 1$ et $x^3 - x^2 + x$.

Exercice 14. Détermine le pgdc des polynômes $f(x)$ et $g(x)$, puis simplifie la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ et $g(x) = x^2 + 3x + 2$;

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$;

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 8x^2 - x - 21$ et $g(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + x - 15$;

e) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6$;

f) $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^2 - x + 1$.

Exercice 15. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie tes réponses !

a) Si le degré des polynômes $f(x)$ et $g(x)$ est le même, alors leur pgdc vaut 1.

b) Si le pgdc de deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ à coefficients réels est $x - a$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$, alors les graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se coupent en $(a; 0)$.

c) Si $d(x) = \text{pgdc}(f(x), g(x))$, alors $(d(x))^2 = \text{pgdc}((f(x))^2, (g(x))^2)$.

d) Si $d(x) = \text{pgdc}(f(x), g(x))$, alors $d(x) + 1 = \text{pgdc}(f(x) + 1, g(x) + 1)$.

Exercice 16. Détermine le pgdc de 37 894 060 279 et 18 272 779 829. (Attention : chacun de ces deux nombres est un produit de deux nombres premiers à six chiffres.)