Série 18

Pour le 4 février 2026

Exercice 1

Mets la matrice suivante (à coefficients réels) sous forme échelonnée et réduite à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calcule toutes les solutions du système linéaire suivant (aide-toi de l'exercice 1) :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 4x & + & 8y & + & 4z & + & 8t & + & u & = & 9 \\ x & + & 2y & + & z & + & 2t & & & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & 5t & + & u & = & 6 \end{array} \right.$$

Exercice 3

Calcule toutes les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccr} 4x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & -7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccr} -x & + & 13y & - & 7z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y)$.
On rappelle de la série 17 que $g_1 = (1; 0; 0)$, $g_2 = (0; 0; 1)$ et $g_3 = (-2; 1; 1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et que $u_1 = (1; 1)$ et $u_2 = (1; 0)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule la matrice de changement de base Q de $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.

   Indication. Cette matrice est facile à construire puisque ses colonnes donnent les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique.

b) Calcule la matrice de changement de base P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la matrice $(Id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}an}$.

Indication. Cette matrice est plus difficile à construire puisque ses colonnes donnent l'expression des vecteurs de la base canonique écrits comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{C}$.

c) Calcule la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ grâce à la formule du changement de base (qui fait intervenir un produit de trois matrices).

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Une matrice de changement de base est carrée.

b) Si on travaille sur un corps fini $K = \mathbb{F}_p$ et avec l'espace vectoriel K^n, il n'y a qu'un nombre fini de matrices de changement de base.

c) Il existe une matrice de $M_{2\times 7}(\mathbb{C})$ dont le rang vaut 3.

d) Il existe une matrice de $M_{3\times 5}(\mathbb{C})$ dont le rang vaut 3.

e) Soit $\alpha : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$. On choisit les bases canoniques et on construit les matrices A de α et B de β. Alors le rang de la matrice $BA \in M_5(\mathbb{R})$ est le même que celui de la matrice $AB \in M_2(\mathbb{R})$.

f) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée et réduite.

Exercice 6

Mets la matrice suivante, à coefficients dans $\mathbb{R}$, sous forme échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Calcule son rang en fonction des paramètres a, b, c.

Exercice 7

Calcule la dimension du sous-espace vectoriel $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \,|\, p(1) = 0,\ p(2) = p(3)\}$ de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$. Vérifie ensuite que $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ appartient à W et trouve une base de W qui te permette d'exprimer $p(x)$ facilement dans cette base.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix}$.

a) Résous le système $AX = B$.

b) Résous le système $AX = C$ en fonction des valeurs du paramètre a.

Exercices théoriques

Exercice 9

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice *carrée*.
Montre que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Le système d'équations linéaire et homogène formé des n équations $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ admet une unique solution (laquelle ?).
Indication. Le système d'équations $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ revient à l'équation vectorielle $Ax = 0$.

(2) Pour tous $b_1, \ldots, b_n \in K$, il existe une solution au système linéaire formé des n équations $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$.

Indication. On peut par exemple montrer que b) implique a) par contraposée.

Exercice 10

La transposée. Soit $A \in M_{n\times m}(K)$. On définit la matrice *transposée* $A^t \in M_{m\times n}(K)$ en échangeant le rôle des lignes et des colonnes : dans la i-ème ligne et j-colonne de A^t le coefficient $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

a) Calcule la transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Montre que l'application "transposition" $M_{n\times m}(K) \to M_{m\times n}(K)$ est linéaire.

c) Montre que $(A^t)^t = A$.

d) Montre que la transposition définit un isomorphisme K-linéaire entre $M_{n\times m}(K)$ et $M_{m\times n}(K)$.

e) Détermine l'ensemble des matrices appartenant à $M_n(K)$ qui vérifient $A^t = A$. Montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel W de $M_n(K)$ et calcule sa dimension.
Pour te simplifier la vie, tu peux supposer que $n = 4$.

f) Soit U le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Calcule sa dimension (pour $n = 4$ si tu veux). Donne une base explicite de U.

g) Calcule la dimension de $U \cap W$ et trouve une base.

h) Est-ce que $U + W = M_n(K)$?

Exercice 11

Démontre la proposition suivante :

Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Indication. Tu peux montrer que toute matrice est équivalente à une matrice de la forme

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice formée des r premières lignes et r premières colonnes est la matrice I_r, les autres coefficients sont tous nuls. Pour ce faire, considère A comme la matrice d'une application linéaire et choisis astucieusement de bonnes bases !