# Série 17

Pour le 28 janvier 2026

**Exercice 1**

On considére le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 1}$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leq 1$. Montre que $(1+x, 1-x)$ forme une base de $V$ et utilise-la pour construire un isomorphisme $\alpha : V \to \mathbb{R}^2$.
**Indication.** Définis d'abord l'image des vecteurs (ici ce sont des polynômes) de base, puis "étend par linéarité" pour définir $\alpha(ax+b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2**

On considère l'application linéaire *trace*, $\mathrm{Tr} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, définie par

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

a) Choisis les bases canoniques de $M_2(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{C}$ pour construire la matrice de la trace.

b) Calcule $\ker \mathrm{Tr}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $\alpha : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ l'application définie par $\alpha(X) = AX$. Montre que $\alpha$ est linéaire et calcule sa matrice (pour la base canonique).

d) Soit $\beta : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la composition $\mathrm{Tr} \circ \alpha$. Explique pourquoi cette application est linéaire et calcule sa matrice (pour les bases canoniques).

e) Calcule le rang de $\beta$ en fonction des coefficients $a, b, c$ et $d$ de la matrice $A$.

**Exercice 3**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x; y; z) = (x + y + z; x - 2y)$.

a) Montre que $g_1 = (1; 0; 0)$, $g_2 = (0; 0; 1)$ et $g_3 = (-2; 1; 1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Montre que $u_1 = (1; 1)$ et $u_2 = (1; 0)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Trouve la matrice de $f$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

d) Trouve la matrice de $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

**Exercice 4**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

b) Le $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{F}_7)$ est isomorphe au $\mathbb{F}_{11}$-espace vectoriel $\mathbb{F}_{11}[x]^{\leq 3}$.

c) Le produit $AB$, où $A \in M_{n\times 1}(K)$ et $B \in M_{1\times n}(K)$ est une matrice $n \times n$ dont le rang vaut *au plus* 1.

d) Lorsque $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ sont non-nulles, le rang de $\beta \circ \alpha$ vaut *au moins* 1.

e) La matrice de la dérivation $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 4} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ est inversible (rappelons que $D(p(x)) = p'(x)$).

**Exercice 5**

Soit $\alpha : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\alpha(x; y; z; t) = (x + y + z + t; x + 2y - t; x - y + 3z + 5t).$$

a) Trouve la matrice $A$ telle que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ x + 2y - t \\ x - y + 3z + 5t \end{pmatrix}$.

b) Calcule $\alpha(1; 2; 2; -1)$, $\alpha^{-1}(1; 3; -3)$ et $\alpha^{-1}(0; 0; 0)$.

c) Calcule l'image par $\alpha$ du sous-espace $< (1; 2; 2; -1), (1; 1; 0; 0) >$.

**Exercice 6**

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les applications linéaires données par $\alpha(x; y) = (2x+y; x-y; 3x)$ et $\beta(a; b; c) = (a + b - c; b + 2c)$. On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule les matrices $A$ de $\alpha$ et $B$ de $\beta$.

b) Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.

c) Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

**Exercice 7**

Soient $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires données par

$$\alpha(x; y; z) = (2x + y + z; y - z) \text{ et } \beta(a; b) = (a + b; a - b; b).$$

On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule les matrices $A$ de $\alpha$ et $B$ de $\beta$.

b) Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.

c) Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

**Exercice 8**

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Attention, on ne demande pas de calculer l'inverse s'il existe, mais seulement d'expliquer pourquoi telle matrice est ou n'est pas inversible !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Indication.** Tu pourras considérer ces matrices comme étant celles d'applications linéaires et travailler avec les vecteurs colonnes de ces matrices.

## Exercices théoriques

**Exercice 9**

Soit $V$ un $K$-espace vectoriel et $\alpha : V \to V$ un isomorphisme (linéaire). Montre que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$ est $K$-linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

### Exercice 10

**Opérations élémentaires.** On travaille avec des matrices $A$, $E_{ij}(\lambda), P_{ij}$ et $D_i(\mu)$ de $M_n(K)$.

a) Montre que $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda+\mu)$ et calcule l'inverse de la matrice $E_{ij}(1)$.

b) Calcule $E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1)$.

c) Décris la matrice $AE_{ij}(\lambda)$.

d) Décris la matrice $AD_i(\mu)$.

e) Décris la matrice $AP_{ij}$.

### Exercice 11

Soient $A, B \in M_n(K)$. Montre que $BA$ est une matrice inversible si et seulement si $A$ et $B$ sont inversibles.

**Une piste possible.** Si $BA$ est inversible, considérer les applications linéaires $\alpha : K^n \to K^n$ et $\beta : K^n \to K^n$ dont $A$ et $B$ sont les matrices, respectivement. Le but est de montrer que $\alpha$ et $\beta$ sont des isomorphismes. On peut le faire par exemple en calculant le noyau de $\alpha$ et l'image de $\beta$.