Série 16

Pour le 21 janvier 2026

Exercice 1

Calcule dans chacun des cas suivants la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et justifie ta réponse en donnant une base.

a) $V = M_2(\mathbb{C})$;

b) V est l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré ≤ 3 qui s'annulent en 1 et en 7 ;

c) $V = \mathbb{C}^5$;

d) $V = \mathbb{C}[x]$;

e) V est le sous-espace de $\mathbb{C}^3$ des triplets $(z; z'; z'')$ qui vérifient l'équation $z + z' + z'' = 0$;

f) V est l'ensemble de toutes les applications linéaires $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;

Exercice 2

On définit l'application *trace* $\mathrm{Tr} : M_2(K) \to K$ de la façon suivante :

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

a) Montre que la trace est linéaire ;

b) Trouve une base de $\ker \mathrm{Tr}$;

c) Trouve une base de $\mathrm{Im}\mathrm{Tr}$.

Exercice 3

Détermine dans chacun des cas suivants si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-) linéaire.

a) $f(z) = \bar{z}$;

b) $f(z) = |z|$;

c) $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$;

d) $f(z) = z^2$;

e) $f(z) = e^z$.

Exercice 4

Soient L et M les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$L =< (0; 0; 1; 2), (4; 2; 1; 2), (-6; -3; 2; 4) >$$

$$M =< (3; 5; 5; 3), (2; 3; 3; 2), (-1; 1; 1; -1) >$$

Trouve une base de L, de M, de $L \cap M$ et de $L + M$. Donne les dimensions de chacun de ces sous-espaces et utilise la formule qui permet de calculer la dimension de $L + M$ pour contrôler ta réponse.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Une application d'anneaux $f : A \to B$ telle que $f(ab) = f(a)f(b)$ et $f(a + b) = f(a) + f(b)$ est un homomorphisme d'anneaux.

b) Il n'y a qu'un homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

c) Si $\dim V > \dim W$, alors $f : V \to W$ ne peut être injective.

d) Il y a une infinité d'applications K-linéaires de K dans K pour certains corps.

e) Il y a une infinité d'applications K-linéaires de K dans K pour tous les corps.

f) La dimension de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\mathcal{L}(V, W)$ est finie pour tout V et tout W.

Exercice 6

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par $f(x, y, z) = (x - 2y, 6y - 3x)$.

a) Montre que f est linéaire ;

b) Trouve une base de $\ker f$;

c) Trouve une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 7

Trouve un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et le sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Exercices théoriques

Exercice 8

Les polynômes. Soit K un corps. Nous travaillons avec l'ensemble $V = K[x]$ de tous les polynômes à coefficients dans K.

a) Montre que $K[x]$ est un K-espace vectoriel. Donne la forme explicite de l'addition et de l'action.

b) Montre que l'ensemble $K[x]^{\leq n}$ de tous les polynômes de degré $\leq n$ est un sous-espace vectoriel de $K[x]$.

c) Trouve une base de $K[x]^{\leq 4}$. Existe-il une base où aucun polynôme n'est de degré 3 ?

d) L'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx^7$ avec $a, b \in K$ est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, trouves-en une base.

e) L'ensemble des polynômes de degré pair est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, trouves-en une base.

f) L'ensemble des polynômes de la forme $x^2 p(x)$ avec $p(x) \in K[x]$ est-il un sous-espace ? Si, oui trouves-en une base.

Exercice 9

Projecteurs. Soit V un K-espace vectoriel. Une application linéaire $p : V \to V$ est un projecteur si $p \circ p = p$.

a) Montre que la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur une droite passant par l'origine est un projecteur.

b) Montre que $\ker p \oplus \mathrm{Im} p = V$ pour tout projecteur p.

c) Donne une description explicite de cette somme directe dans le cas de la projection orthogonale sur la droite $x = y$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Si V est de dimension finie n, montre que toute famille de n vecteurs linéairement indépendants forme une base de V.

Exercice 11

Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et $U \subset V$ un sous-espace. Montre que $\alpha(U)$ est un sous-espace de W.

Exercice 12

Espace dual. Soit V un K-espace vectoriel. L'espace dual $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ est l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de V dans K.

a) Lorsque $\dim V = n$, calcule la dimension de V^* en explicitant une base.

b) Lorsque $V = \mathbb{R}$, montre que V^* est formé de toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(v) = av$ pour un certain nombre réel a.

c) Lorsque $V = \mathbb{R}^2$, trouve une application telle que $f(av) = af(v)$ pour tout v et pour tout a, mais qui n'est pas linéaire.