

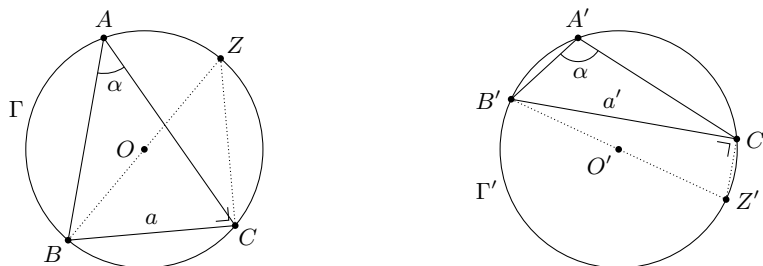
Exercice 1. On a

$$\cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha + \beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\alpha + \beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha + \beta),$$

et donc

$$\sin(\alpha + \beta) = -\cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha) \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta).$$

Exercice 2. On considère $\triangle ABC$ inscrit dans un cercle Γ de centre O , et on considère les cas où BC ne passe pas par O (sinon, le résultat est immédiat, puisque Γ est alors le cercle de Thalès de $[BC]$, a vaut $2r$ et $\sin(\alpha) = \sin(\pi) = 1$). La droite BO intersecte le cercle en Z , et Γ devient le cercle de Thalès de $[BZ]$ (dans les figures ci-dessous, on représente les cas où A et Z sont du même côté de BC ou pas) :



Dans les deux cas, le triangle $\triangle BZC$ est rectangle en C , et on en déduit que $\overline{BZ} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\widehat{BZC})}$, autrement dit

$$2r = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

(dans le 1^{er} cas, $\widehat{BZC} = \alpha$ par le théorème de l'angle au centre ; dans le 2^e cas, $\widehat{BZC} = \pi - \alpha$ parce que la somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit vaut π radians, et donc $\sin(\widehat{BZC}) = \sin(\alpha)$).

Exercice 3.

a) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\alpha) = 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\alpha)$. D'où $2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos(\alpha)$, et le résultat.

b) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\alpha) = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\alpha)$. D'où $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \cos(\alpha)$, et le résultat.

c) Par a) et b), $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$.

Exercice 4.

a) On a :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) + \sin(\beta) &\stackrel{\text{idée}}{=} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) + \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \stackrel{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$
 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \stackrel{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$
 $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3},$
 $\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \stackrel{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$
 $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \stackrel{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$
 $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$
 $\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$
 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$
 $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{12})}{\cos(\frac{5\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}},$
 $\cot\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}.$

Exercice 6.

a) $\cot^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \stackrel{\text{ex. 3}}{=} \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}.$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \stackrel{\text{prop.}}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4} + t - \frac{\pi}{4} + t\right) \left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) =$
 $\tan(2t) \left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) \stackrel{\text{prop.}}{=} \tan(2t) \underbrace{\left(1 + \cot\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)}_{=1+1} = 2 \tan(2t)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) \stackrel{\text{prop.}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(t) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(t)$
 $= \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) = \cos(t).$

d) $(\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta))^2 + (\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta))^2 \stackrel{\text{prop.}}{=} \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1.$

e) $2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2 \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t}{2})} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \stackrel{\text{cor.}}{=} \sin(t).$

Exercice 7.

a) $S = \{k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

d) $S = \{\arcsin(0,26443) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(0,26443) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

f) $S = \emptyset$ car le sinus prend des valeurs entre 1 et -1.

Exercice 8. On rappelle que $\cos(x) = \cos(-x)$, $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, les fonctions \sin et \cos sont 2π -périodique, et la fonction \tan est π -périodique.

- a) $S = \left\{ \frac{\pi}{7} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- b) $S = \left\{ \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- c) $S = \{38^\circ + k \cdot 90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
- d) $3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $3x + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ et donc $x = \frac{\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{17\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$. Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{17\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- e) $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, ainsi $S = \left\{ \frac{3\pi}{2} + k \cdot 4\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{2} + k \cdot 4\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- f) $\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, ainsi $S = \left\{ \frac{11\pi}{8} + k \cdot 3\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{19\pi}{8} + k \cdot 3\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Exercice 9. La solution est détaillée dans les points **a)** et **b)** ; dans les points suivants, la démarche est la même.

- a) Comme $\cos(5x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$, l'équation donnée devient $\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) = 0$. On utilise encore le fait que $\sin(x) = -\sin(-x)$ pour arriver à l'équation $\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$. Cette équation est vérifiée si $5x + \frac{\pi}{2} = -x + k \cdot 2\pi$ ou $5x + \frac{\pi}{2} = \pi - (-x) + k \cdot 2\pi$. Ainsi

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- b) Comme $\sin(x - 60^\circ) = \cos(90^\circ - (x - 60^\circ)) = \cos(150^\circ - x)$, l'équation devient $\cos(3x) = \cos(150^\circ - x)$. Elle est vérifiée si $3x = 150^\circ - x + k \cdot 360^\circ$ ou $3x = -(150^\circ - x) + k \cdot 360^\circ$. Ainsi

$$S = \{37,5^\circ + k \cdot 90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-75^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- c) Comme $\cot(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, l'équation devient $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et alors

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- d) $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

- e) Comme $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2t)$, l'équation devient $\sin(t - 3\pi) = \sin(2t)$, ou encore $\sin(t - \pi) = \sin(2t)$ et

$$S = \{\pi + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ k \cdot \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- f) Comme $\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$, l'équation devient $\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$ et donc

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$