Exercice 1. Puisqu'il s'agit d'un système *paramétrique* de 2 équations à 2 inconnues, utilisons la méthode de Cramer.

$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+c & a-c \end{vmatrix} = (a+b)(a-c)-(a-b)(a+c) = a^2-ac+ab-bc-a^2-ac+ab+bc = 2ab-2ac = 2a(b-c),$

$D_x = \begin{vmatrix} 2ab & a-b \\ 2ac & a-c \end{vmatrix} = 2ab(a-c)-2ac(a-b) = 2a^2b-2abc-2a^2c+2abc = 2a^2(b-c),$

$D_y = \begin{vmatrix} a+b & 2ab \\ a+c & 2ac \end{vmatrix} = (a+b)2ac-(a+c)(2ab) = 2a^2c+2abc-2a^2b-2abc = 2a^2(c-b) = -2a^2(b-c).$

- Pour $a \neq 0$ et $b \neq c$ on a $D \neq 0$ et les formules de Cramer s'appliquent :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a^2(b-c)}{2a(b-c)} = a,$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2a^2(b-c)}{2a(b-c)} = -a \qquad \text{d'où } S = \{(a;-a)\}.$$

- Si $a = 0$ ou $b = c$, alors $D = D_x = D_y = 0$ et le système est indéterminé ; même si dans ce cas une des équations est nécessairement superflue, analysons les différentes formes possibles de l'ensemble des solutions :
  - Si $a \neq 0$ et $b = c$, alors $S = \{(x;y) \mid (a+b)x + (a-b)y = 2ab\}$.
    En particulier, si $a \neq 0$ et $b = c = 0$, alors $S = \{(x;-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de pente -1 ; si $a \neq 0$ et $a = b = c$, alors $S = \{(a;y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est une droite verticale ; si $a \neq 0$ et $-a = b = c$, alors $S = \{(x;-a) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite horizontale.
  - Si $a = 0$ et b et c sont non tous les deux nuls, alors $S = \{(x;x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de pente 1.
  - Si $a = b = c = 0$, le système est nul et donc $S = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 585 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$ De cette équation on a $x = 8y$ que l'on substitue dans la première.

$\begin{cases} 64y^2 + y^2 = 585 \\ x = 8y \end{cases}$

La première équation donne
$$\begin{aligned} 65y^2 &= 585 \\ y^2 &= 9 \\ y &= \pm 3, \end{aligned}$$
et donc $x = 8 \cdot (\pm 3) = \pm 24$. Ainsi $S = \{(24;3), (-24;-3)\}$.

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x + y = 16 \end{cases}$ De cette équation on a $x = 16 - y$ que l'on substitue dans la première.

$\begin{cases} (16-y)^2 - y^2 = 96 \\ x = 16 - y \end{cases}$

La première équation nous donne $256 - 32y + y^2 - y^2 = 96$ et donc $y = 5$, ainsi $x = 11$. La solution du système est donc $S = \{(11;5)\}$.

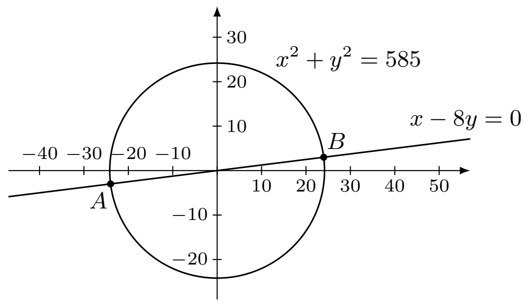
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy + 10 = 0 \end{cases}$ De cette équation on a $x = \frac{-10}{y}$ que l'on substitue dans la première.

La première équation nous donne alors une équation en y du quatrième degré dont voici la résolution
$$\begin{aligned} \frac{100}{y^2} + y^2 &= 29 \mid \cdot y^2 \\ y^4 - 29y + 100 &= 0 \\ (y^2-4)(y^2-25) &= 0 \\ (y-2)(y+2)(y-5)(y+5) &= 0. \end{aligned}$$

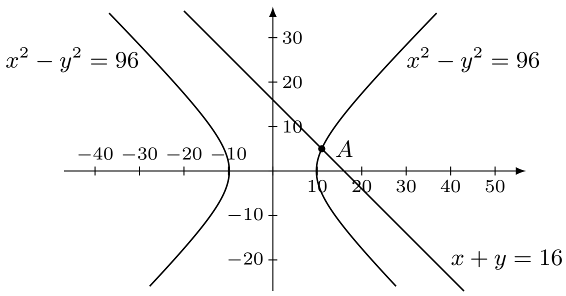
Il y a donc quatre possibilité pour y. Si $y = 2$ alors $x = \frac{-10}{2} = -5$, si $y = -2$ alors $x = \frac{-10}{-2} = 5$, si $y = 5$ alors $x = \frac{-10}{5} = -2$ et si $y = -5$ alors $x = \frac{-10}{-5} = 2$. Ainsi la solution du système est
$$S = \{(-2;5); (-5;2); (5;-2); (2;-5)\}$$

Remarque avancée : Il est intéressant de voir ce que représentent géométriquement ces systèmes d'équations.

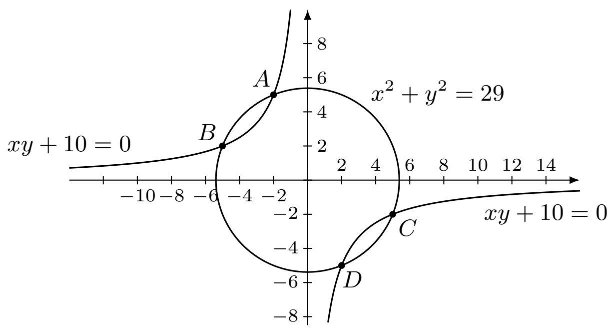
- **Système a).** L'équation $x^2+y^2=585$ représente un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{585}$ et les solutions du système représentent donc les points d'intersection entre ce cercle et la droite $x-8y=0$. La figure suivante représente les solutions :



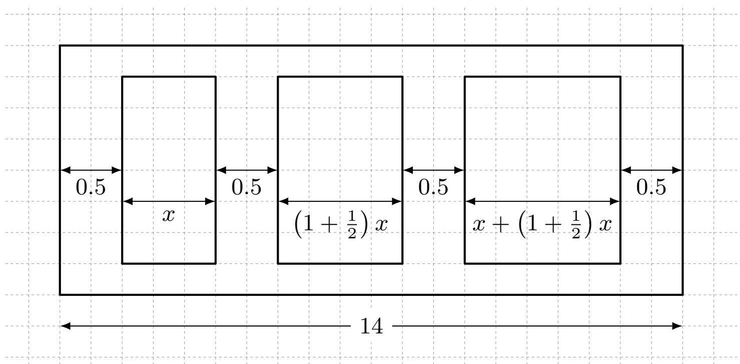
- **Système b).** Cette fois-ci, l'équation $x^2-y^2=96$ représente ce que l'on appelle une hyperbole. La figure suivante représente la solution :



- **Système c).** Dans ce cas on complique encore un peu la situation. $x^2+y^2=29$ représente un cercle et $xy+10=0$ une hyperbole, comme on peut le voir dans la figure suivante il y a bien quatre points d'intersection :



Exercice 3. Dans ce genre de problème, il est conseillé de commencer par faire un croquis de la situation.



Posons x comme étant la largeur de la première fenêtre, la deuxième a une largeur égale à une fois et demie la première, c'est-à-dire $\left(1+\frac{1}{2}\right)x=\frac{3}{2}x$. La troisième fenêtre a une largeur égale à la somme des largeurs des deux premières : $x+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}x$. Si on additionne les longeurs des trois fenêtres et l'écart entre chacune d'entre elles et le mur, l'énoncé nous dit que l'on arrive à 14 mètres. Écrivons cela en équation et résolvons-la.

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} & = & 14\\ \frac{10}{2}x+4\cdot\frac{1}{2} & = & 14\\ 5x & = & 14-2\\ x & = & \frac{12}{5}.\end{array}$$

Ainsi $x=\frac{12}{5}=2.4$ mètres, c'est la largeur de la première fenêtre. La deuxième a une largeur égale à $\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{18}{5}=3.6$ mètres, la troisième a une largeur de $\frac{5}{2}x=\frac{5}{2}\cdot\frac{12}{5}=6$ mètres.

Exercice 4.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \quad |\cdot 1\\ x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \quad |\cdot(-1)\\ 3x & + & 2y & + & z & = & 22\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9\\ -x & - & 2y & - & 3z & = & -14\\ 3x & + & 2y & + & z & = & 22\end{array}\right.$ On additionne les deux premières lignes et on garde la première.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \quad |\cdot(-3)\\ & - & y & - & 2z & = & -5\\ 3x & + & 2y & + & z & = & 22 \quad |\cdot 1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & - & 3y & - & 3z & = & -27\\ & - & y & - & 2z & = & -5\\ 3x & + & 2y & + & z & = & 22\end{array}\right.$ On additionne la première et la troisième équation et on garde la première.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9\\ & - & y & - & 2z & = & -5\\ & - & y & - & 2z & = & -5\end{array}\right.$

Les deux dernières équations sont les mêmes, on peut donc en enlever une et le système devient indéterminé ou impossible, exprimons x et y en fonction de z.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9\\ & - & y & - & 2z & = & -5\end{array}\right.$ On additionne les deux équations et on garde la deuxième.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & 4\\ & - & y & - & 2z & = & -5\end{array}\right.$

De la première équation on a $x=z+4$ et de la deuxième $y=-2z+5$, ainsi $S=\{(z+4;-2z+5;z)|z\in\mathbb{R}\}$ (c'est l'expression paramétrique de la droite d'intersection des plans $x+y+z=9$ et $-y-2z=-5$).

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 16 \quad |\cdot 1\text{, on additionne les deux premières et on garde cette équation}\\ 3x & + & 2y & - & z & = & 5 \quad |\cdot 1\\ 9x & - & y & + & 2z & = & 40\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 16 \quad |\cdot(-2)\text{, on additione la première et la troisième et on garde cette équation}\\ 5x & + & y & & & = & 21\\ 9x & - & y & + & 2z & = & 40 \quad |\cdot 1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 16\\ 5x & + & y & & & = & 21\\ 5x & + & y & & & = & 8\end{array}\right.$

En soustrayant la troisième équation de la deuxième, on obtient $0=3$ et donc le système est impossible et $S=\emptyset$.

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 16\\ & & y & + & z & = & 7 \quad \text{De cette équation on obtient } y=7-z\\ z & + & x & & & = & 5 \quad \text{De cette équation on obtient } x=5-z\end{array}\right.$

On substitue $y=7-z$ et $x=5-z$ dans la première équation pour obtenir $5-z+7-z=16$ et donc $z=-2$, de là $y=7-(-2)=9$ et $x=5-(-2)=7$. Ainsi $S=\{(7;9;-2)\}$.

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 14 \quad |\cdot 1\text{, on additionne la 1}^{\text{re}}\text{ et la 2}^{\text{e}}\text{ et on garde la 1}^{\text{re}}\\ x & + & 2y & + & z & = & 7 \quad |\cdot(-1)\\ 2x & + & y & + & z & = & 3\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 14 \\ & - & y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \begin{array}{l} |\cdot(-2), \text{ on additionne la } 1^{\text{re}} \text{ et la } 3^{\text{e}} \text{ et on garde la } 1^{\text{re}} \\ \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 14 \\ & - & y & + & z & = & 7 \\ & - & y & - & 3z & = & -25 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{On soustrait la } 3^{\text{e}} \text{ de la } 2^{\text{e}} \text{ les deux dernières et on garde la } 2^{\text{e}} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 14 \\ & - & y & + & z & = & 7 \\ & & & & 4z & = & 32 \end{array}\right.$$

Alors $z = 8$, de la deuxième équation $y = z-7 = 8-7 = 1$ et de la première $x = 14-y-2z = 14-2-2\cdot 8 = -3$, ainsi $S = \{(-3; 1; 8)\}$.

Exercice 5. Posons x comme étant le nombre de cartons jaunes reçus par les espagnols, y le nombre de buts marqués par les Espagnols et z le nombre de buts marqués par les Suisses. Les Espagnols ont reçus un carton jaune de plus que le nombre de buts qu'ils ont marqués, donc $x = y + 1$. Le nombre de buts suisses égale un tiers du nombre de buts espagnols donc $z = \frac{1}{3}x$. Le nombre de but marqués pendant la rencontre moins le penalty est égal au nombre de cartons jaunes pour Madrid, ainsi $y + z - 1 = x$. En mettant ensemble ces trois équations, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ \frac{1}{3}x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on a $z = 2$. en substituant $z = 2$ dans la troisième équation, on a $\frac{1}{3}x - 2 = 0$ et donc $x = 6$. Enfin, en substituant $x = 6$ et $z = 2$ dans la première équation, on obtient $6 - y - 2 = -1$ et donc $y = 5$, ainsi le score final était de 5 à 2 en faveur du Real Madrid.

Exercice 6. Cette affirmation est fausse. En effet, considérons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$, en soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $0 = 1$ et donc le système est impossible ce qui signifie qu'il n'admet aucune solution. (Les plans représentés par ces équations sont parallèles et ne s'intersectent donc pas.)

Exercice 7.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 5 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 5\cdot 5 - 1\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 3 = -59.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 3 + (-5)\cdot(-2)\cdot 1 - (-5)\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 2 = 14.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 12 + 5\cdot 16\cdot 3 + 8\cdot 4\cdot 2 - 8\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 16\cdot 2 - 5\cdot 4\cdot 12 = 0.$

d) $\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot c + (b+c)\cdot(a+c)\cdot(a+b) - (b+c)\cdot b\cdot c - a\cdot b\cdot(a+b) - a\cdot(a+c)\cdot c =$
$2(a\cdot b\cdot c) + (a\cdot b + b\cdot c + a\cdot c + c^2)(a+b) - b^2\cdot c - b\cdot c^2 - a^2\cdot b - a\cdot b^2 - a^2\cdot c - a\cdot c^2 = 2(a\cdot b\cdot c) + a^2\cdot b +$ $a\cdot b^2 + a\cdot b\cdot c + b^2\cdot c + c\cdot a^2 + a\cdot b\cdot c + c^2\cdot a + c^2\cdot b - b^2\cdot c - b\cdot c^2 - a^2\cdot b - a\cdot b^2 - a^2\cdot c - a\cdot c^2 = 4\cdot a\cdot b\cdot c.$

Exercice 8.

a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 9$, comme D est non-nul, le système admet une unique solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 23 & 2 & 1 \\ 46 & 2 & 4 \\ 75 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 36$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 23 & 1 \\ 5 & 46 & 4 \\ 10 & 75 & 4 \end{vmatrix} = 27$, $D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 23 \\ 5 & 2 & 46 \\ 10 & 5 & 75 \end{vmatrix} = 45$.

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{36}{9} = 4$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{27}{9} = 3$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{45}{9} = 5$ et donc $S = \{(4; 3; 5)\}$.

b) $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$, comme D est non-nul, le système admet une unique solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, $D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{12} = 1$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et donc $S = \left\{\left(\frac{5}{4}; 1; \frac{1}{4}\right)\right\}$.

Exercice 9.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftrightsquigarrow L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftrightsquigarrow L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2 - L_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$

Ainsi la solution du système est $S = \{(7; 8; -9)\}$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftrightsquigarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightsquigarrow L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right)$ $L_1 \rightsquigarrow L_1 - 2L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right)$ $L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

La dernière ligne signifie « $0 = 5$ »et donc le système est impossible, $S = \emptyset$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow -L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow -L_3 + 3L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow L_3 - 5L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{18}L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $L_2 \rightsquigarrow L_2 - 5L_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $L_1 \rightsquigarrow L_1 - 2L_2 - 3L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Ainsi la solution du système est $S = \{(1; 2; 0)\}$.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 10 & 14 & 3 \end{array}\right)$ $L_2 \rightsquigarrow L_2 + 3L_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 10 & 14 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(entorse à Gauss)} \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -59 \end{array}\right)$

La dernière ligne signifie "$0 = -59$" et donc le système est impossible, $S = \emptyset$.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 13 & 5 & -9 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L2 \\ \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 13L_2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 57 & -61 \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow \frac{1}{57}L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{61}{57} \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + 7L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 + 4L_3 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{57} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{57} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{61}{57} \end{array}\right)$

Ainsi la solution du système est $\left\{\left(\frac{29}{57}; -\frac{16}{57}; -\frac{61}{57}\right)\right\}$.

Exercice 10. Non, car en substituant $(3; 4; -2)$ dans la troisième équation on obtient $-21 + 20 + 6 = 5 \neq 7$.

Exercice 11.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & m \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftrightsquigarrow L_2 \\ L_2 \leftrightsquigarrow L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 7 & m \end{array}\right)$ $L_3 \rightsquigarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & m+6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array}\right)$$

Si $m = 4$ le système est indéterminé et admet donc une infinité de solutions, si $m \neq 4$ le système est impossible et n'admet donc aucune solution.

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -m \\ 2 & 3 & 5 & 0 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \\ 0 & 1 & 3 & -2 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow L_3 - L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \end{array}\right)$$

Les deux dernières équations sont les mêmes quelque soit $m \in \mathbb{R}$ et donc le système est indéterminé, il admet ainsi une infinité de solutions quelle que soit la valeur de m.

Exercice 12. Suivons la méthode de Gauss dans les deux cas.

a) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{array}\right) L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 + 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

On peut s'arrêter à ce stade en constatant qu'il sera possible de substituer la valeur de u donnée par la quatrième équation dans la troisième pour trouver z et ainsi de suite. Le système est donc déterminé (et possède donc une unique solution).

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow 2L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 + 2L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Comme la dernière ligne de la matrice ne contient que des zéros, le système est indéterminé (et possède donc une infinité de solutions).