EPFL — Cours Euler 19.11.2025
Deuxième année

Série 12

Exercice 1. Démontre la formule d'addition des arguments du sinus.

Indication. Utilise la formule d'addition des arguments du cosinus pour calculer $\cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2. Soit ΔABC un triangle inscrit dans un cercle de rayon r. Montre que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

où α est la mesure de l'angle en A, et a est la longueur du côté opposé à A.

Indication. Le côté $[BC]$ est de longueur a. Détermine la valeur de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ et calcule alors la moitié de la longueur du côté $[BC]$ en fonction du rayon r et de $\sin(\alpha)$.

Exercice 3. À l'aide des formules de duplication des arguments, montre que

a) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$;

b) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$;

c) $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos\alpha}$.

Exercice 4. À l'aide des formules de somme et différence des arguments, montre que

a) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

b) $\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$.

Exercice 5. À l'aide de l'**Exercice 3**, calcule les valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{8}$. Déduis les valeurs exactes des fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 6. Établis les égalités suivantes:

a) $\cot^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$;

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 2\tan(2t)$;

c) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) = \cos(t)$;

d) $\big(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)^2 = 1$;

e) $2\tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \sin(t)$.

Exercice 7. Équations trigonométriques I. Trouve toutes les solutions des équations suivantes.

a) $\cos(x) = 1$;

b) $\sin(x) = -1$;

c) $\tan(x) = 1$;

d) $\sin(x) = 0{,}26443$;

e) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

f) $\sin(x) = 1{,}45673$.

Exercice 8. Équations trigonométriques II. Trouve toutes les solutions des équations suivantes.

a) $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$;

b) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\tan(2x) = \tan(76°)$;

d) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}$;

e) $\sin\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

f) $\cos\left(\dfrac{2t}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 9. Équations trigonométriques III. Trouve toutes les solutions des équations suivantes.

a) $\cos(5x) + \sin(x) = 0$;

b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos(3x)$;

c) $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \cot(3x) = 0$;

d) $\sin(3t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$;

e) $\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(t - 3\pi) = 0$;

f) $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2t\right) = 0$.