













Ens: S. Basterrechea
Analyse I - XXX
automne 2025
1 heure

FAKE-9

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

| Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien | | |
|--|---|---|
| choisir une réponse select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren |
|    |  |   |
| ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte | | |
|       | | |

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

☐ $\inf A = 2$

☐ $\inf A = \frac{1}{2}$

☒ $\inf A = 0$

☐ A n'est pas minoré

Question 2 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

☒ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

Question 3 : Soit une solution $z \in \mathbb{C}$ de l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Alors z satisfait nécessairement

☐ $|z| = 1$

☐ $|z| = 0$

☒ $|z| = 2$

☐ $|z| = 4$

Question 4 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors

☐ $\sup(A \cup B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$

☐ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

☐ $\sup(A \cup B) = \sup(A) + \sup(B)$

☒ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Question 5 : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

☒ converge et converge absolument

☐ converge mais ne converge pas absolument

☐ ne converge pas mais converge absolument

☐ ne converge pas et ne converge pas absolument

Correction

Question 6 : Soit la suite

$$x_n = e^{2\sqrt{n^2+1}-n}.$$

Alors,

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$

☒ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

Question 7 : Soit la suite

$$a_n = \frac{3n \sin(n^2) + 2}{1 + n}, \quad \forall n \neq 1.$$

Alors

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

☒ (a_n) est bornée et diverge

Question 8 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

☐ $] -\infty, -1[$

☐ $] -\infty, 0]$

☐ $[-1, +\infty[$

☒ $] -\infty, 0[$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup\{x + c : x \in A\} - \sup\{x + c : x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 11 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{\lambda + n}{\lambda n} \right)^n.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que (a_n) converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 13 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1+i\}$.

☐ VRAI ☒ FAUX