

230

Ens: S. Basterrechea
Analyse I - XXX
automne 2025
1 heure

FAKE-9

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
+3 points si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera:
+1 point si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
		

Correction

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Inf $A = 2$ | <input type="checkbox"/> Inf $A = \frac{1}{2}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> Inf $A = 0$ | <input type="checkbox"/> A n'est pas minoré |

Question 2 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ |

Question 3 : Soit une solution $z \in \mathbb{C}$ de l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Alors z satisfait nécessairement

- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|---|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $ z = 1$ | <input type="checkbox"/> $ z = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> $ z = 2$ | <input type="checkbox"/> $ z = 4$ |
|------------------------------------|------------------------------------|---|------------------------------------|

Question 4 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Sup($A \cup B$) = Sup(A) · Sup(B) | <input type="checkbox"/> Sup($A \cup B$) = min{Sup(A), Sup(B)}
<input checked="" type="checkbox"/> Sup($A \cup B$) = max{Sup(A), Sup(B)}
 |
| <input type="checkbox"/> Sup($A \cup B$) = Sup(A) + Sup(B) | |

Question 5 : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

- converge et converge absolument
- converge mais ne converge pas absolument
- ne converge pas mais converge absolument
- ne converge pas et ne converge pas absolument

Correction

Question 6 : Soit la suite

$$x_n = e^{2\sqrt{n^2+1}-n}.$$

Alors,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

Question 7 : Soit la suite

$$a_n = \frac{3n \sin(n^2) + 2}{1 + n}, \quad \forall n \neq 1.$$

Alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

(a_n) est bornée et diverge

Question 8 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

$]-\infty, -1[$

$]-\infty, 0]$

$[-1, +\infty[$

$]-\infty, 0[$

Correction

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\text{Sup}\{x + c : x \in A\} - \text{Sup}\{x + c : x \in B\} = \text{Sup } A - \text{Sup } B.$$

VRAI FAUX

Question 10 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

VRAI FAUX

Question 11 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{\lambda + n}{\lambda n} \right)^n.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que (a_n) converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

VRAI FAUX

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

VRAI FAUX

Question 13 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$.

VRAI FAUX