Exercice 1. L'entier n étant compris entre 10 et 100 et se terminant par 5, il s'écrit $n = 10k + 5$, où k est un entier avec $1 \leq k \leq 9$. En élevant n au carré, on trouve

$$\begin{aligned} n^2 &= (10k+5)^2 \\ &= 100k^2 + 100k + 25 \\ &= 100k(k+1) + 25. \end{aligned}$$

La dernière ligne du calcul correspond exactement à l'énoncé.

Exercice 2. La généralisation s'écrit $n^2 - n = (n-1)^2 + n - 1$. Cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car

$$(n-1)^2 + n - 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 = n^2 - n.$$

En fait, ce calcul montre même que l'égalité $x^2 - x = (x-1)^2 + x - 1$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Considérons le nombre entier $n = 10x + k$, où $0 \leq x \leq 9$ et $0 \leq k \leq 9$, n est un nombre quelconque compris entre 0 et 99. En élevant n au carré on obtient $n^2 = 100x^2 + 20kx + k^2 = 10(10x^2 + 2kx) + k^2$. Le premier terme de ce polynôme est un multiple de 10, il se termine donc par 0. Ainsi, le chiffre de l'unité du carré de n est le même que celui du carré de k. Par exemple, le chiffre de l'unité du carré de 37 sera 9 car ici $k = 7$ et donc $k^2 = 49$ (en effet $37^2 = 1369$). Ces chiffres sont donc $0, 1, 4, 5, 6, 9$.

Exercice 4.

a) Cette affirmation est correcte car comme 1 est toujours une racine du polynôme $x^n - 1$, on pourra toujours factoriser ce polynôme de la façon suivante $x^n - 1 = (x-1)h(x)$, où $h(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$.

b) Cette affirmation est fausse, car par exemple le polynôme $x^2 + 1$ est irréductible, il n'est donc divisible par aucun polynôme.

c) Cette affirmation est fausse. En effet, quelque soit n, $2n+1$ sera toujours impair et donc $(-1)^{2n+1} = -1$, ainsi -1 sera toujours une racine de $x^{2n+1} + 1$, ce qui veut dire que $x^{2n+1} + 1$ est toujours divisible par $x + 1$.

Exercice 5. Calculons $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 7\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -6\left(-\frac{1}{27}\right) + 7 \cdot \frac{1}{9} - 1 = \frac{6}{27} + \frac{21}{27} - \frac{27}{27} = 0$. On voit ainsi que $-\frac{1}{3}$ est une racine de $f(x)$ et donc $f(x)$ est divisible par $3x + 1$. Effectuons cette division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrr|lll}
-6x^3 & +7x^2 & & -1 & 3x & +1 & \\ \cline{5-7}
6x^3 & +2x^2 & & & -2x^2 & +3x & -1 \\ \cline{1-2}
 & 9x^2 & & & & & \\
 & -9x^2 & -3x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & & & & \\
 & & 3x & +1 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Ainsi, nous pouvons déjà décomposer $f(x) = (3x+1)(-2x^2+3x-1) = -(3x+1)(2x^2-3x+1)$. Pour décomposer le deuxième facteur de ce polynôme, on observe que -3 et 2 sont respectivement la somme est le produit de -1 et -2 ; Viète donne alors $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{2})$. Ainsi, $2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$, et le polynôme de départ se factorise comme

$$f(x) = -(3x+1)(2x-1)(x-1).$$

Exercice 6. Il existe plusieurs méthodes pour trouver les solutions de ces équations ; nous proposons celle qui semble la plus efficace ici (en commençant toujours par une mise en évidence (MEE) des facteurs communs).

a) Par Viète, $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$. Ainsi, les seules solutions sont $x = -2$ et $x = -4$, donc $S = \{-4; -2\}$.

b) Avec une MEE de z, on obtient $z(3z+5) = 0$, donc $S = \left\{-\frac{5}{3}; 0\right\}$.

c) Par Viète, $2x^2 - x - 1 = 2(x + \frac{1}{2})(x - \frac{2}{2}) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$, ainsi $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

d) Par la formule du trinôme, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0$: il n'y a donc pas de solution réelle et $S = \emptyset$.

e) On repère un carré parfait : $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$. Donc $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

f) L'équation se récrit en une différence de 2 carrés : $(2x-5)^2-7=0$, c'est-à-dire $(2x-5+\sqrt{7})((2x-5-\sqrt{7})=0$. Ainsi $S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}\right\}$.

g) Par MEE et Viète, on obtient $6x(x-\frac{10}{6})(x+\frac{9}{6})=0$, soit encore $6x(x-\frac{5}{3})(x+\frac{3}{2})=0$. Ainsi $S=\left\{0;\frac{5}{3},-\frac{3}{2}\right\}$.

h) Pour chaque facteur, on utilise la formule du trinôme. Pour le premier facteur, $\Delta=(-\sqrt{7})^2-4\cdot 1\cdot 3=-5<0$, il n'y a donc pas de solution réelle. Pour le second facteur, $\Delta=(-4)^2-4(-3)\cdot 6=88$, et donc $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{88}}{-6}=-\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$. Ainsi, $S=\left\{-\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}\right\}$.

i) Par groupement, $9x^3+72x^2-5x-40=9x^2(x+8)-5(x+8)=(9x^2-5)(x+8)$. Le premier facteur est une différence de deux carrés qui se factorise $(3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$ et a comme zéros $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; le second facteur a $x=-8$ comme zéro. D'où $S=\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{3};-8\right\}$.

j) Les diviseurs du terme constant sont ±1, ±2, ±7 et ±14 ; heureusement, $x=-2$ annule $x^3-4x^2-5x+14$, et Horner donne la factorisation $x^3-4x^2-5x+14=(x+2)(x^2-6x+7)$. Les zéros du second facteur s'obtiennent par la formule du trinôme : avec $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot7=8$, on obtient $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{2}$. Donc $S=\left\{-2;3\pm\sqrt{2}\right\}$.

k) En repérant deux fois une différence de 2 carrés, on obtient $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x+2)(x-2)(x^2+4)$. Donc $S=\{-2;2\}$ (l'équation $x^2+4=0$ n'a pas de solution réelle car $x^2+4\geq 4>0$, ou de manière équivalente, son discriminant vaut $-16<0$).

l) En posant $t=x^2$ et en utilisant Viète, on a

$$x^4-17x^2+16 \overset{t=x^2}{=} t^2-17t+16 \overset{\text{Viète}}{=} (t-16)(t+1) \overset{t=x^2}{=} (x^2-16)(x^2-1)=(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)$$

(il est bien sûr aussi possible d'éviter le changement de variable, en observant directement $x^4-17x^2+16=(x^2-16)(x^2-1)$). Donc $S=\{-4;-1;1;4\}$.

m) L'équation est équivalente à $(2x+7)(x^2-2x+1)-(2x+7)(3x-5x^2)=0$, et après MEE de $(2x+7)$, on obtient $(2x+7)\left[(x^2-2x+1)-(3x-5x^2)\right]=0$, soit encore $(2x+7)(6x^2-5x+1)=0$. Le zéro du premier facteur est $x=-\frac{7}{2}$, et le second se factorise par Viète comme $6(x-\frac{2}{6})(x-\frac{3}{6})=6(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$. Donc $S=\left\{-\frac{7}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$.

n) Après MEE de (x^2-2), l'équation devient $(x^2-2)\left[(x^2-2)^2-2(x^2-2)+1\right]=0$. Le premier facteur est une différence de 2 carrés $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, qui s'annule pour $x=\pm\sqrt{2}$. En posant $t=x^2-2$, on voit que le second facteur est un carré parfait $t^2-2t+1=(t-1)^2$, c'est-à-dire $((x^2-2)-1)^2=(x^2-3)^2$, une différence de 2 carrés (élevée au carré) et qui s'annule pour $x=\pm\sqrt{3}$. On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $S=\left\{\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}\right\}$.

Exercice 7. Notons n le nombre cherché, en mettant en équation l'énoncé on arrive à $n^2-n=182$. On résout cette équation avec la formule du trinôme en l'ayant au préalable mise sous la forme $n^2-n-182=0$. Nous avons $\Delta=(-1)^2-4(-182)\cdot1=729=27^2$, et donc $n=\frac{1\pm27}{2}$, c'est-à-dire $n=14$ ou $n=-13$. Dans les problèmes "concrets", il faut toujours se demander si les solutions de l'équation sont réellement des solutions du problème de départ ; ici, les deux solutions de l'équation fournissent une solution admissible au problème de départ.

Exercice 8. Notons $4x$ le premier nombre cherché, c'est bien un multiple de 4. Le multiple de 4 suivant $4x$ s'écrit naturellement $4x+4$ et le suivant $4x+8$. La somme des carrés de ces trois nombres s'écrit $(4x)^2+(4x+4)^2+(4x+8)^2$, et comme elle est égale à 3104, l'équation associée au problème est $(4x)^2+(4x+4)^2+(4x+8)^2=3104$. Commençons par développer le membre de gauche

$$(4x)^2+(4x+4)^2+(4x+8)^2=16x^2+16x^2+32x+16+16x^2+64x+64=48x^2+96x+80=3104,$$

en soustrayant 3104 de l'équation on arrive à $48x^2+96x-3024=0$. Comme tous les termes de cette équation sont divisible par 48, on effectuer une MEE pour arriver à

$$48(x^2+2x-63)=0$$

Par Viète, le second facteur est $x^2+2x-63=(x+9)(x-7)$, et donc $x=-9$ ou $x=7$ sont les solutions de l'équation. Si $x=-9$ les trois nombres cherchés sont -36, -32 et -28 tandis que si $x=7$, les trois nombres cherchés sont 28, 32 et 36. Les deux solutions de l'équation aboutissent à des solutions admissibles du problème.

Exercice 9. On utilise que deux rectangles sont semblables si le rapport de leurs côtés respectifs sont les mêmes. Soit x la longueur du rectangle d'or de largeur 1 mètre. Le petit rectangle dans le rectangle d'or est de largeur

$x-1$, et de longueur 1. Le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ du grand rectangle est $\frac{x}{1}$, soit simplement x, et le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ du petit rectangle est $\frac{1}{x-1}$. Comme ces deux rapports doivent être égaux, on résout

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x-1} \\ (x-1)x &= 1 \\ x^2 - x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Il n'y a pas de factorisation immédiate, on utilise donc la formule du trinôme pour obtenir $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ici, comme $\sqrt{5}$ est plus grand que 2, la solution x_2 est négative. La seule valeur restante possible est x_1, qui est bien positif. La longueur du rectangle d'or de largeur 1 mètre est donc de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mètres. Ce nombre

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

est appelé le *nombre d'or*, et apparaît dans de nombreux domaines de mathématiques, mais aussi dans le rapport de certaines structures en minéralogie ou en biologie.

Exercice 10.

a) $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & 4 \\ 5x & -2y & = & 8 \end{array}\right.$ Additionnons les deux équations et gardons la première.

$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & 4 \\ 6x & & = & 12 \end{array}\right.$ De cette équation on tire que $x = 2$, information que l'on insère dans la première.

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$ Ainsi $S = \{(2;1)\}$.

b) $\left\{\begin{array}{rrrcl} 8x & +9y & -2 & = & 0 \\ 3x & -y & -27 & = & 0 \end{array}\right.$ On commence par faire passer les termes constants à droite de l'égalité.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 8x & +9y & = & 2 \\ 3x & -y & = & 27 \end{array}\right.$ On multiplie cette équation par 1 et on lui additionne 9 fois cette équation, on garde la deuxième équation.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 35x & & = & 245 \\ 3x & -y & = & 27 \end{array}\right.$ De cette équation on tire que $x = \frac{245}{35} = 7$. En insérant $x = 7$ dans cette équation, on trouve $y = -6$.

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7 \\ y & = & -6 \end{array}\right.$ Ainsi $S = \{(7;-6)\}$.

c) Pour ce système, on commence par multiplier chaque équation par le plus petit dénominateur commun des fractions qui les composent, car il est plus commode de travailler avec des nombres entiers.

$\left\{\begin{array}{rrcl} \frac{5x-y}{3} & +\frac{x+y}{2} & = & 7+\frac{x}{18} \\ \frac{x}{3} & +\frac{y}{4} & = & 2 \end{array}\right.$ On multiplie cette équation par 18, et celle ci par 12.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 6(5x-y) & +9(x+y) & = & 18\cdot 7 + x \\ 4x & +3y & = & 24 \end{array}\right.$ On met les deux équations sous forme canonique.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 38x & +3y & = & 126 \\ 4x & +3y & = & 24 \end{array}\right.$ On soustrait la deuxième équation de la première et on garde la deuxième.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 34x & & = & 102 \\ 4x & +3y & = & 24 \end{array}\right.$ De cette équation on tire $x = \frac{102}{34} = 3$. En insérant $x = 3$ dans cette équation, on trouve $y = 4$.

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 4 \end{array}\right.$ Ainsi $S = \{(3;4)\}$

d) $\left\{\begin{array}{rrcl} \frac{4x+15}{3} & -\frac{3y-5}{5} & = & x \\ \frac{2y+3x}{4} & +\frac{y+15}{5} & = & y \end{array}\right.$ On multiplie cette équation par 15, et celle ci par 20.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 5(4x+15) & -3(3y-5) & = & 15x \\ 5(2y+3x) & +4(y+15) & = & 20y \end{array}\right.$ On met les deux équations sous la forme canonique.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 5x & -9y & = & -90 \\ 15x & -6y & = & -60 \end{array}\right.$ On divise cette équation par 3.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 5x & -9y & = & -90 \\ 5x & -2y & = & -20 \end{array}\right.$ On soustrait la deuxième équation de la première et on garde la deuxième.

$\left\{\begin{array}{rrcl} & -7y & = & -70 \\ 5x & -2y & = & 20 \end{array}\right.$ De cette équation on tire $y = \frac{-70}{-7} = 10$. On insère $y = 10$ dans cette équation et on trouve $x = 0$.

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 10 \end{array}\right.$ Ainsi $S = \{(0;10)\}$

e) $\left\{\begin{array}{rrcl} (2x+1)(y-2) & & = & 2yx \\ x(3y-2) & -3y(x-1)+4 & = & 0 \end{array}\right.$ On commence par développer les membres de gauche des deux équations.

$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2xy-2 & -4x & +y & = & 2yx \\ 3xy-3xy+4 & -2x & +3y & = & 0 \end{array}\right.$ On remarque que les termes non-linéaires disparaissent des deux équations.

$\left\{\begin{array}{rrcrl} -4x & +y & = & 2 & \mid \cdot 1 \\ -2x & +3y & = & -4 & \mid \cdot (-2) \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrcl} -4x & +y & = & 2 \\ 4x & -6y & = & 8 \end{array}\right.$ On additionne ces deux équations et on garde la deuxième.

$\left\{\begin{array}{rrcrl} & -5y & = & 10 & \text{De cette équation, } y=-2. \\ -2x & +3y & = & -4 & \text{On insére } y=-2 \text{ dans cette équation et on trouve } x=-1. \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{lcrl} x & = & -1 & \\ y & = & -2 & \text{Ainsi } S=\{(-1;-2)\}. \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rrcrl} x & -2y & = & 3 & \mid \cdot 3 \\ 3x & -6y & = & 9 & \mid \cdot 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & -6y & = & 9 \\ 3x & -6y & = & 9 \end{array}\right.$

On remarque ainsi que ce sont les mêmes équations, les droites qu'elles représentent sont donc confondues et l'ensemble de solution du système est $S=\{(2t+3;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

g) $\left\{\begin{array}{rcrl} 2(x+y) & = & 5 & \mid \cdot 1 \\ x+y & = & 3 & \mid \cdot (-2) \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +2y & = & 5 \\ -2x & -2y & = & -6 \end{array}\right.$

En additionnant ces deux équations ont arrive à $0=-1$, ainsi le système n'a pas de solution, $S=\emptyset$. En fait les droites représentées par ces deux équations sont parallèles.

h) Les équations ont ici trois inconnues. Chaque équation est l'équation d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On dit que ce système est *sous-déterminé* c'est-à-dire qu'il y a plus d'inconnues que d'équations. Pour la résolution de ce système il y a aussi trois possibilités, soit les plans sont sécants et leur intersection est une droite, soit les plans sont parallèles et leur intersection est vide, soit ils sont confondus et leur intersection est le plan lui-même.

$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 5 \\ 3x & -2y & +z & = & 4 \end{array}\right.$

Dans ce cas, les coefficients des deux équations ne sont pas proportionnels, et les plans qu'elles représentent sont sécants. Pour trouver l'équation de la droite d'intersection, exprimons x et y en fonction de z.

$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & -z & = & 5 & \text{Multiplions cette ligne par 2 et additionnons-lui la deuxième pour éliminer les } y. \\ 3x & -2y & +z & = & 4 & \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & -z & = & 5 & \text{Multiplions cette ligne par } -5 \text{ et additionnons-lui la seconde pour éliminer les } x. \\ 5x & & -z & = & 14 & \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrrcrl} & -5y & +4z & = & -11 & \\ 5x & & -z & = & 14 & \text{Exprimons finalement } x \text{ et } y \text{ en fonction de } z. \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{5}z+\frac{14}{5} \\ \quad y & = & \frac{4}{5}z+\frac{11}{5} \end{array}\right.$

Ainsi on peut écrire $S=\left\{\left(\frac{1}{5}z+\frac{14}{5}\,;\,\frac{4}{5}z+\frac{11}{5}\,;\,z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.

i) Le système est *surdéterminé*, c'est-à-dire qu'il y a plus d'équations que d'inconnues. Résoudre ce système revient à déterminer l'intersection de trois droites. Pour ce faire on résout le système formé des deux premières équations et on vérifie si la troisième équation est vérifiée avec le point trouvé.

$\left\{\begin{array}{rrcrl} 5x & -2y & = & 7 & \mid \cdot (-2) \\ 10x & +3y & = & 7 & \mid \cdot 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rrcr} -10x & +4y & = & -14 \\ 10x & +3y & = & 7 \end{array}\right.$ On additionne les deux équations et on garde la première.

$\left\{\begin{array}{rrcrl} 5x & -2y & = & 7 & \\ & 7y & = & -7 & \text{De cette équation on tire } y=-1 \text{ qui, introduit dans la première, donne } x=1. \end{array}\right.$

En substituant $(x;y)=(1;-1)$ dans la troisième équation du système de départ, on arrive à $6=7$ et donc le système est incompatible, $S=\emptyset$.

j) On commence également par résoudre le système formé des deux premières équations.

$\left\{\begin{array}{rrcrl} 3x & -2y & = & 5 & \mid \cdot 1 \\ x & -3y & = & 4 & \mid \cdot (-3) \end{array}\right.$

$$\begin{cases} 3x & -2y & = & 5 & \mid \cdot 1 \\ -3x & +9y & = & -12 & \text{On additionne ces deux équations et on garde la deuxième.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} & 7y & = & -7 & \text{De là, on tire } y = -1. \\ x & -3y & = & 4 & \text{On substiture } y = -1 \text{ et on trouve } x = 1. \end{cases}$$

En substituant $(x;y) = (1;-1)$ dans la troisième équation du système de départ on arrive à $0 = 0$, ainsi $(1;-1)$ est la solution du système surdéterminé, c'est le point d'intersection des trois droites, S={(1 ;-1)}.

Exercice 11. Un nombre à deux chiffres s'écrit $10x + y$, où x est le chiffre des dizaines et y celui des unités. La somme des deux chiffres du nombre est $x + y = 9$. Le nombre formé en retranchant 3 de chacun des chiffres s'écrit $10(x-3) + (y-3)$, ce nombre est égal à la moitié du nombre de départ, $\frac{10x+y}{2}$, diminué de 6 : $\frac{10x+y}{2} - 6$. Ainsi le système à résoudre associé au problème est le suivant.

$$\begin{cases} x + y & = & 9 \\ 10(x-3) + (y-3) & = & \frac{10x+y}{2} - 6 \end{cases}$$

On met ce système sous sa forme canonique et on le résout comme à l'exercice précédent pour obtenir $S = \{(5;4)\}$, le nombre cherché est ainsi 54.

Exercice 12. Un nombre à trois chiffres s'écrit $100x + 10y + z$, en l'écrivant deux fois de suite on obtient $1000(100x + 10y + z) + 100x + 10y + z$. On peut factoriser ce polynôme de la façon suivante :

$$1000(100x + 10y + z) + 100x + 10y + z = 1000(100x + 10y + z) + 1(100x + 10y + z) = 1001(100x + 10y + z).$$

Or le facteur 1001 est exactement le produit de 7, 11 et 13, l'énoncé et donc démontré.